FORMULAIRE

MATHEMATIQUES

Fonctions circulaires

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right] \qquad \sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right] \qquad \sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Fonctions hyperboliques

$$\mathrm{ch}\, x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{sh}\, x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \qquad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

Dérivées

Fonctions	Dérivées
x^n	$n\, x^{n-1}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\mathrm{cotan}\, x = \frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\mathrm{Ln}\, \lvert x \rvert$	$1/x$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}x$

Primitives

Fonctions	Primitives
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x-a}$	$\mathrm{Ln}\, \lvert x-a \rvert$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}x$

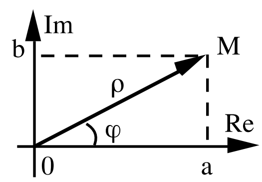
Développements limités

Fonctions	Développements limités
$(1+\varepsilon)^\alpha$	$1+\alpha\varepsilon+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\varepsilon^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\varepsilon^n+\ldots$
$\cos\varepsilon$	$1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n}}{(2n)!}+\ldots$
$\sin\varepsilon$	$\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{3!}+\frac{\varepsilon^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$
$\mathrm{Ln}(1+\varepsilon)$	$\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\varepsilon^n}{n}+\ldots$
e^ε	$1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+\ldots+\frac{\varepsilon^n}{n!}+\ldots$

Développement de Taylor d'une fonction f(x) au voisinage de $x = x_o$

$$f(x)=f(x_o)+(x-x_o)\,[f'(x)]_{x_o}+\frac{(x-x_0)^2}{2}\,[f''(x)]_{x_o}+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\,[f^{(n)}(x)]_{x_o}+\ldots$$

Complexes



$\underline{z} = a + i\,b$ avec $a = \mathrm{Re}(\underline{z})$ partie réelle de $\underline{z}$ et $b = \mathrm{Im}(\underline{z})$ partie imaginaire de $\underline{z}$

On peut aussi écrire $\underline{z}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\rho\,e^{i\varphi}=\rho\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

Module de $\underline{z}$: $\rho=|\underline{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$ **Argument de** $\underline{z}$: $\varphi=\mathrm{Arg}(\underline{z})$

avec $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\tan\varphi=\frac{b}{a}\rightarrow\varphi=\arctan\frac{b}{a}$ **si** $a>0$ ($+\pi$ **si** $a<0$)

Egalité de deux complexes $\underline{z_1}=\underline{z_2}$ **si** $\rho_1=\rho_2$ **et** $\varphi_1=\varphi_2$

$$\underline{z}=\underline{z_1}.\underline{z_2}\rightarrow\rho=\rho_1.\rho_2 \text{ et } \varphi=\varphi_1+\varphi_2 \qquad \underline{z}=\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}\rightarrow\rho=\frac{\rho_1}{\rho_2} \text{ et } \varphi=\varphi_1-\varphi_2$$

Equations différentielles

Premier ordre $\tau\frac{dx}{dt}+x=Cte$ $\qquad x=A\,e^{-t/\tau}+Cte$

Deuxième ordre $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_o}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_o^2x=0$

Equation caractéristique: $r^2+\frac{\omega_o}{Q}r+\omega_o^2=0$ **Discriminant** $\Delta=\omega_o^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$

* $\Delta<0$ ($Q>\frac{1}{2}$) **Régime pseudopériodique**

$\Delta=-4\,\omega^2$ **avec** $\omega^2=\omega_o^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)>0$ **soit** $\omega=\omega_o\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

Deux solutions complexes conjuguées : $r_1=-\frac{\omega_o}{2Q}+j\,\omega$ **et** $r_2=-\frac{\omega_o}{2Q}-j\,\omega$

$$x=e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t}\,(A\,e^{j\omega t}+B\,e^{-j\omega t})=e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t}\,(C\cos\omega t+D\sin\omega t)=E\,e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t}\cos(\omega t+\Phi)$$

* $\Delta>0$ ($Q<\frac{1}{2}$) **Régime apériodique**

Deux solutions réelles négatives : $r_1=-\frac{\omega_o}{2Q}+\omega_o\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}$ **et** $r_2=-\frac{\omega_o}{2Q}-\omega_o\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}$

$$x = e^{-\frac{\omega_o}{2Q}t}\left(Ae^{\omega_o\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\,t} + Be^{-\omega_o\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\,t}\right)$$

*** $\Delta = 0$ ($Q = \frac{1}{2}$)** **Régime apériodique critique**

Deux racines réelles négatives confondues : $r_1 = r_2 = -\omega_o$

$$x = (A + B\,t)\,e^{-\omega_o t}$$

Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

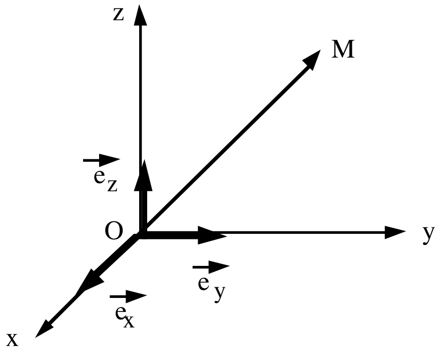
Variables : x, y, z Base : $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$ indépendante de M

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$ $d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$

dSx = dy dz dSy = dx dz

dSz = dx dy $d\tau$ = dx dy dz

Gradient $\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$



Coordonnées cylindriques

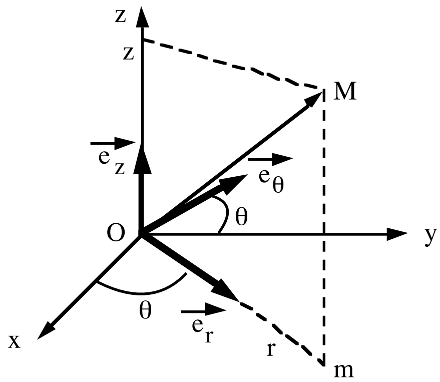
Variables : r, θ, z Base : $\vec{e_r}(M), \vec{e_\theta}(M), \vec{e_z}$ locale

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}$ $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$

dSr = r dθ dz dSθ = dr dz

dSz = r dr dθ $d\tau$ = r dr dθ dz

Gradient $\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$



Coordonnées sphériques

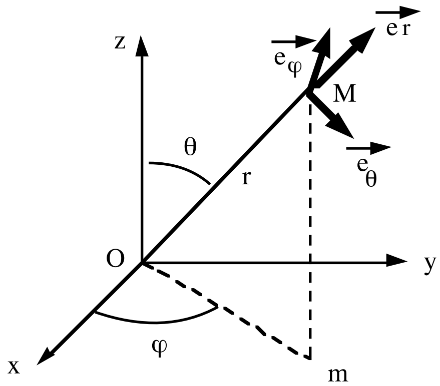
Variables : r, θ, φ Base : $\vec{e_r}(M), \vec{e_\theta}(M), \vec{e_\varphi}(M)$ locale

$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r}$ $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

dSr = $r^2 \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ dSθ = r sin θ dr dφ

dSz = r dr dθ $d\tau = r^2 \sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Gradient $\overrightarrow{grad}\,f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$



Aires et volumes

Disque de rayon R : $A = \pi R^2$

Sphère de rayon R : $A = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Cylindre droit de rayon R et de hauteur h : $A = 2\pi R h$ $V = \pi R^2 h$

Produits

On considère deux vecteurs $\vec{a}\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}$ et $\vec{b}\begin{vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{vmatrix}$ décomposés dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, cartésienne, cylindrique ou sphérique. Les trois vecteurs sont donc unitaires, orthogonaux deux à deux et tels que $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$.

Produit scalaire

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = ab\cos\theta$ avec $a = \|\vec{a}\|$, $b = \|\vec{b}\|$ et θ l'angle entre les deux vecteurs.

Cass particuliers : $\vec{a}.\vec{b} = \pm ab$ si $\vec{a} // \vec{b}$; $a^2 = \|\vec{a}\|^2 = \vec{a}.\vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

Produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{vmatrix}$$

La première composante du produit vectoriel s'obtient, après avoir rayé la première ligne de chacun des vecteurs, en faisant le produit en croix des composantes restantes. On obtient les autres composantes à partir de la première par permutation circulaire sur les indices (1, 2, 3).

Direction de $\vec{a} \wedge \vec{b}$: perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$.

Sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$: tel que le trièdre $(\vec{a},\vec{b},\vec{a} \wedge \vec{b})$ soit direct.

Un trièdre direct s'obtient :

* par la « règle des trois doigts de la main droite » : pouce sur $\vec{a}$, index sur $\vec{b}$ et majeur sur $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

* par la « règle du tire-bouchon » : le tire-bouchon tournant pour amener $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ progresse dans la direction et le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Norme de $\vec{a} \wedge \vec{b}$: $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = ab\sin\theta$ avec $a = \|\vec{a}\|$, $b = \|\vec{b}\|$ et θ l'angle entre les deux vecteurs.

Double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$.

PREFIXES

10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
kilo	méga	giga	téra	milli	micro	nano	pico

UNITES

Longueur	**Surface**	**Volume**	**Angle**
Mètre			**Radian**
m	**m^2**	**m^3**	**rad**

Masse	**Temps**	**Fréquence**	**Vitesse**	**Accélération**	**Vitesse angulaire Pulsation**	**Force**	**Energie Travail**	**Puissance**	**Pression**
Kilogramme	**Seconde**	**Hertz**				**Newton**	**Joule**	**Watt**	**Pascal**
kg	**s**	**Hz**	**$m.s^{-1}$**	**$m.s^{-2}$**	**$rad.s^{-1}$**	**N**	**J**	**W**	**Pa**

Température	**Masse volumique**	**Quantité de matière**	**Densité particulaire**	**Capacité thermique**	**Capacité thermique massique**	**Capacité thermique molaire**
Kelvin		**Mole**				
K	**$kg.m^{-3}$**	**mol**	**m^{-3}**	**$J.K^{-1}$**	**$J.K^{-1}.kg^{-1}$**	**$J.K^{-1}.mol^{-1}$**

Intensité	Ddp Tension	Résistance	Conductance	Charge	Inductance	Capacité	Champ électrique	Champ magnétique
Ampère	**Volt**	**Ohm**	**Siemens**	**Coulomb**	**Henry**	**Farad**		**Tesla**
A	**V**	**Ω**	**S**	**C**	**H**	**F**	**$V.m^{-1}$**	**T**

LETTRES GRECQUES

α	Α	alpha
β	Β	bêta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	Ε	epsilon
ζ	Ζ	dzéta
η	Η	êta
θ	Θ	thêta
ι	Ι	iota
κ	Κ	kappa
λ	Λ	lambda
μ	Μ	mu
ν	Ν	nu
ξ	Ξ	ksi
ο	Ο	omicron
π	Π	pi
ρ	Ρ	rhô
σ	Σ	sigma
τ	Τ	tau
υ	Υ	upsilon
φ, ϕ	Φ	phi
χ	Χ	khi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	oméga

CONSTANTES PHYSIQUES

Constante de la gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$

Permittivité du vide $\varepsilon_o = \dfrac{1}{36\pi 10^9}\ F.m^{-1}$ $\qquad \varepsilon_o\, \mu_o\, c^2 = 1$

Perméabilité du vide $\mu_o = 4\,\pi\, 10^{-7}\ H.m^{-1}$

Nombre d'Avogadro : $N = 6{,}023.10^{23}\ mol^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$ $\qquad k = R/N$

Constante de Boltzmann : $k = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$

Constante de Planck : $h = 6{,}62.10^{-34}\ J.s$

Température de fusion de la glace sous 1 atm : 0°C = 273,15 K

Température d'ébullition de l'eau sous 1 atm : 100°C = 373,15 K

Point triple de l'eau : 0,01°C = 273,16 K

Vitesse du son dans l'air à 0°C : $331\ m.s^{-1}$

Charge élémentaire $e = 1{,}6.10^{-19}\ C$

Masses du proton et du neutron : $1{,}67.10^{-27}\ kg$

Masse de l'électron : $9{,}1.10^{-31}\ kg$

Accélération de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

Masse de la Terre : $6.10^{24}\ kg$

Masse du Soleil : $2.10^{30}\ kg$

Distance moyenne Soleil-Terre : 150 millions de km