Outils Mathématiques. (Corrigé).

Ex 1 : Utiliser les formules connues reliant les grandeurs pour déterminer une équation aux dimensions. J'explicite les relations en termes d'unités (ça me semble plus lisible ainsi).

$[F] = [mg] = kg.m.s^{-2}$ donc $[W] = [F.l.\cos\theta] = kg.m^2.s^{-2}$. ($\cos\theta$ sans dimension)
de même : $[U] = [mgz] = kg.m^2.s^{-2}$ et $[Ec] = [mv^2/2] = kg.m^2.s^{-2}$.

Pour l'énergie relativiste, il suffit de vérifier que γ est bien un coefficient sans dimension.

$W = Ri^2t = u.i.t$; le produit u.i est la puissance dissipée dans le résistor, donc une énergie rapportée à un temps.

$W = Q.U/2 = C.U^2/2$; U étant la tension aux bornes du condensateur.
utilisons la relation courant-tension pour le condensateur : $i = C.dU/dt$
soit : $C.dU = i.dt$
en équation dimensionnelle : $[C.U^2/2] = [C.U].[U] = [i.dt].[U] = [U].[i].[dt]$ on retrouve le produit d'une puissance par un temps, soit donc une énergie.
Même démarche pour l'énergie magnétique dans une bobine : $W = Li^2/2$ en utilisant cette fois la relation tension-courant : $u = L.di/dt$.

Ex 2 : coefficient de viscosité.
Le facteur k est sans dimension.$[F] = [\eta]^x.[r]^y.[v]^z$
soit, exprimé en unités : $kg.m^2.s^{-2} = (kg.m^{-1})^x.(m)^y.(m.s^{-1})^z$
soit en identifiant les exposants : $1 = x$; $2 = - x + y + z$; $-2 = -z$.
et donc : $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$.

Ex3 : Constantes de temps.
$\tau = RC$: en s'appuyant sur les relations : $u = Ri$ et $i = C.du/dt$, $[RC] = [u/i].[i.dt/du] = s$
$\tau = L/R$: en s'appuyant sur les relations : $u = Ri$ et $u =L.di/dt$, $[RC] = [u/(di/dt)].[i/u] = s$

Ex4 : Pour ε, ε', ou $x << 1$, on envisage les DL1 :
$(1 + \varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon$; $(1 - \varepsilon)^2 \approx 1 - 2\varepsilon$; $\sqrt{1-\varepsilon} = (1-\varepsilon)^{1/2} \approx 1-\varepsilon/2$; $1/(1+\varepsilon) \approx (1+\varepsilon)^{-1} \approx 1 - \varepsilon$

$1/(1-\varepsilon)^2 \approx (1-\varepsilon)^{-2} \approx 1 + 2\varepsilon$; $\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} = (1+\varepsilon)^{-1/2} \approx 1-\varepsilon/2$; $\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} = (1-\varepsilon)^{-1/2} \approx 1+\varepsilon/2$

$\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon'} = (1+\varepsilon).(1-\varepsilon')^{-1} \approx (1+\varepsilon).(1+\varepsilon') \approx 1+\varepsilon+\varepsilon'$ il faut négliger le terme d'ordre 2 : $\varepsilon.\varepsilon'$.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) \approx x - (-x) = 2x$$

$$\sqrt[3]{61} = (64-3)^{1/3} = 4\left(1-\frac{3}{64}\right)^{1/3} \approx 4\left(1-\frac{1}{64}\right) = 4 - \frac{1}{16}.$$

Oscillations d’un pendule avec frottement :

Pour Q grand, $\sigma = 1/(2Q)$ est faible.$T = T_o.(1 - \sigma^2)^{-1/2} \approx T_o.(1 + \sigma^2/2)$;
donc $\Delta T = T - T_o = T_o.\sigma^2/2$ et la variation relative est finalement :

$$\Delta T/T_o = \sigma^2/2 = 1/(8Q^2) = 0{,}005 \text{ soit } 0{,}5\ \%.$$

Ex 5 : valeurs approchées de sin et cos.

Pour $\delta x \approx 0$: en développant sin δx (resp. cos δx) à l'ordre 1 :

$\sin(x + \delta x) = \sin x .\cos \delta x + \sin \delta x.\cos x \approx \sin x + \delta x.\cos x$

$\cos(x + \delta x) = \cos x.\cos \delta x – \sin x.\sin \delta x \approx \cos x - \delta x. \sin x$

DL2 en ωt pour $\omega t \approx \pi/2$:
On applique la formule de Taylor
$\sin(\omega t) \approx \sin(\pi/2) + \cos(\pi/2).(\omega t - \pi/2) – (1/2).\sin(\pi/2).(\omega t - \pi/2)^2 = 1-(1/2).(\omega t - \pi/2)^2$
(graphiquement le voisinage de π/2 correspond à une partie approximativement parabolique de la fonction sin)
$\cos(\omega t) \approx \cos(\pi/2) - \sin(\pi/2).(\omega t - \pi/2) – (1/2).\cos(\pi/2).(\omega t - \pi/2)^2 = -(\omega t - \pi/2)$
(graphiquement le voisinage de π/2 correspond à une partie approximativement linéaire de la fonction cos).

Ex 6 :

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \approx (1-v^2/c^2)^{-1/2}$ donc si v << c, $0 < v^2/c^2 << 1$ amène : $\gamma \approx 1 – v^2/(2c^2)$.
Finalement, on alors : $Ec = (\gamma - 1).mc^2 \approx mv^2/2$.

Ex 7 : Charge d'un condensateur sur une durée brève.

Pour t << RC : 0 < t / RC << 1 amène par un DL1 :
$q(t) = CE.(1 – \exp(-t / RC)) \approx CE.(1 –(1 – t / RC) = (E/R).t$

Ex 8 : voir feuille d'exercices.

Ex 9 : Variation du poids avec l'altitude.
$dP = (-2.dz).mg_oR^2/(R + z)^3$.
dP/P peut ensuite s'obtenir en divisant et simplifiant par l'expression de P. Mais aussi plus directement dP/P s'obtient au moyen de la différentielle logarithmique :

$dP/P = d\ln P = d\ln(mg_o.R^2) – d\ln(R+z)^2 = -2.dz/(R + z)$

A.N. : identifier dz et Δz.

Ex 10 : voir feuille exercices

Ex 11 : Période d'oscillation d'un pendule.
1) Allongement relatif de 1% : ΔL/L = 0,01. Calculons la différentielle logarithmique de l'expression de T_o : $dT_o/T_o = d\ln(2\pi) + (1/2).(d\ln L – d\ln g) = (1/2)\ dL/L$ car seule la valeur de L varie dans cette question. A.N : en confondant variations et différentielles : $\Delta T_o/T_o = 0{,}005$.

2) Cette fois, seul g varie dans l'expression de T_o : $dT_o/T_o = -(1/2)\ dg/g$
On évalue dg/g par la différentielle logarithmique de l'expression $g = g_o.R^2/(R + z)^2$ soit donc $dg/g = -2.dz/(R + z)$.
Il vient : $dT_o/T_o = -(1/2)\ dg/g = dz /(R +z)$
soit numériquement : $\Delta T_o/T_o = \Delta z / R$ pour z = 0.

Ex 12 : Régulation de tension.
On différentie l'expression de U_F en considérant E comme seule variable, yant une variation δE : $\delta U_F = R_d.\delta E /(R + R_d)$ donc $f_o = \delta E / \delta U_F = (R + R_d) / R_d = 1 + R/R_d$.
Le taux d'ondulation correspond à la variation relative de U_F :
$\delta U_F / U_F = R_d.\delta E /(R_d.E + R.U_o)$

Ex 13 :
En appliquant la règle sur le nombre de chiffres significatifs : $P = m.g_o = 4,24.10^2$ N.
Si on veut se compliquer un peu, on peut aussi envisager, vies les données :
$m = (43,237 \pm 0,001)$ kg et $g_o = (9,81 \pm 0,01)$ m.s^{-2}, qui mène à : 423,7 N < $m.g_o$ < 424,6 N

Ex 14 :
Voir cours.

Ex 15 :
En calculant la différentielle logarithmique : $df_r/f_r = -(1/2)(dL/L + dC/C)$ donc $\Delta f_r/f_r = 5\%$.
On attend donc à mesurer f_r dans l'intervalle : 15130 Hz < f_r < 16720 Hz. correspondant à l'intervalle 15920 Hz ± 5%.
La mesure elle même est faite à partir de $T_o = 1/f_r$. Donc l'incertitude relative de la mesure de f_r sera de 2%.

mesure relevée	écart relatif $(f_m - f_r)/f_r$	conclusion
15130	-5 %	limite, mais acceptable vue l'incertitude de mesure.
17029	+7 %	suppose l'addition, à leur maximum, de l'erreur de mesure et de l'erreur sur la valeur des composants. Invraisemblable.
14760	-7,3 %	inacceptable
17123	+7,5 %	inacceptable

Ex 16 : Incertitude de mesure dans la méthode de Bessel
Par la différentielle logarithmique de f' : $\dfrac{df'}{f'} = d\dfrac{(D^2 - l^2)}{D^2 - l^2} - \dfrac{dD}{D} = \dfrac{D^2 + L^2}{D^2 - l^2}\dfrac{dD}{D} - \dfrac{2l}{D^2 - l^2}dl$

En majorant (<u>après</u> regroupement des termes différentiels) :

$$\frac{\Delta f'}{f'} = \frac{D^2 + L^2}{D^2 - l^2}\frac{\Delta D}{D} + \frac{2l}{D^2 - l^2}\Delta l$$

Ex 17 : même démarche. $\dfrac{dC}{C} = 2\dfrac{d\pi}{\pi} + \dfrac{dm}{m} + \dfrac{d(a_2{}^2 - a_1{}^2)}{(a_2{}^2 - a_1{}^2)} + \dfrac{d(T_2{}^2 - T_1{}^2)}{(T_2{}^2 - T_1{}^2)}$

Soit : $\dfrac{dC}{C} = 2\dfrac{d\pi}{\pi} + \dfrac{dm}{m} + \dfrac{2a_2 da_2 - 2a_1 da_1}{a_2{}^2 - a_1{}^2} + \dfrac{2T_2 dT_2 - 2T_1 dT_1}{T_2{}^2 - T_1{}^2}$

Tenir compte du fait que les incertitudes sur a_1 et a_2 ainsi que sur T_1 et T_2 sont indépendantes, donc ne se soustraient pas lors du regroupement des termes.
Comme numériquement $\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a$ et $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$, on arrive après majoration à :
$\dfrac{\Delta C}{C} = 2\dfrac{\Delta\pi}{\pi} + \dfrac{\Delta m}{m} + \dfrac{2\Delta a}{|a_2 - a_1|} + \dfrac{2\Delta T}{|T_2 - T_1|}$ on peut bien sûr négliger $\Delta\pi/\pi$. (π est donné avec 10 chiffres significatifs par la calculatrice).

Ex 18, 19, 20 : Equations différentielles.
Pour ceux qui veulent prendre un peu d'avance et appliquer leur cours de mathématiques.
Ces situations seront reprises en cours…et forcément maîtrisées par tous !