OUTILS MATHEMATIQUES

Analyse dimensionnelle

1. On montrera que les expressions d'énergies données ci-après ont pour dimension :

$$[E] = L^2.M.T^{-2}$$

Travail d'une force : $W = F.l\cos\theta$; Energie potentielle de pesanteur : $U = mgz$;
Energie cinétique en mécanique classique $K = 1/2\ mv^2$;
Energie mécanique totale en mécanique relativiste : $E = \gamma mc^2$,
en notant :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

et avec $c = 3.10^8$ m/s vitesse de la lumière dans le vide.
Energie Joule dissipée sous forme de chaleur dans une résistance : $W = Ri^2t$;
Energie électrostatique dans un condensateur : $W = QU / 2 = Q^2/ 2C = CU^2 / 2$.

2. Coefficient de viscosité et force de frottement :
L'expérience montre que la force de frottement F subie par une sphère plongée dans un fluide dépend de :
- η, coefficient de viscosité, caractéristique du fluide considéré, $[\eta] = L^{-1}.M.T^{-1}$
- r : le rayon de la sphère,
- v : la vitesse relative entre la sphère et le fluide.

En supposant que F s'exprime sous la forme : $F = k.\eta^x.r^y.v^z$, trouver l'expression de F.
R : $F = K.\eta.r.v$

3. Constante de temps d'un circuit RC :
Montrer que le produit RC, apparaissant en exponentielle dans les équations de charge ou de décharge d'un condensateur C à travers une résistance R est homogène à un temps.
Ceci justifie la dénomination "constante de temps du circuit R-C : $\tau = RC$".
Procéder de même pour la constante de temps d'un circuit inductif : $\tau = L/R$.
Aide : les dimensions de R et C peuvent se déterminer à partir de grandeurs énergétiques ($[E] = ML^2T^{-2}$) du formulaire d'électricité.

Développements limités – formule de Taylor

4. a) Calculer, en appliquant l'approximation au premier ordre : $(1 + \varepsilon)^2$; $(1 - \varepsilon)^2$; ainsi que $\sqrt{1-\varepsilon};\frac{1}{1+\varepsilon};\frac{1}{(1-\varepsilon)^2};\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}};\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}};\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon'}$; $Ln\frac{1+x}{1-x}$ en supposant les quantités ε et $x << 1$.
Applications :
b) calculer une valeur approchée de la racine cubique de 61, en remarquant que $4^3 = 64$.
c) La prise en compte des frottements fluides agissant sur un pendule simple de période propre $T_o = 2\pi\sqrt{l/g}$ amène à une expression $T = T_o\,(1-\sigma^2)^{-1/2}$ en meilleur accord avec les oscillations amorties pseudo-périodiques effectivement observées. σ est un facteur d'amortissement. Q est le facteur de qualité, avec $\sigma = 1/2Q$. Relier $\Delta T = T - T_o$ à σ et Q pour Q grand. Application numérique pour Q = 5. Que vaut la variation relative $\Delta T/T_o$?
R : a) et b) Utiliser Les DL1 en 0 : $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ et $Ln\,(1+x) \approx x$
a) $1 + 2\varepsilon$; $1 - 2\varepsilon$; $1 - \varepsilon/2$; $1 - \varepsilon$; $1 + 2\varepsilon$; $1 - \varepsilon/2$; $1 + \varepsilon/2$; $1 + \varepsilon + \varepsilon'$; $2x$.

5. Valeurs approchées de sin et cos :
Donner en fonction de sinx, cosx et de la quantité δx, supposée faible devant x, les valeurs approchées de : $\sin(x + \delta x)$ et $\cos(x + \delta x)$.Vérifier à l'aide de formules trigonométriques que l'on retrouve les formules approchées obtenues à l'aide de la formule de Taylor.

Exprimer le DL au 2°ordre de sin(ωt) et cos(ωt) lorsque la quantité ωt est au voisinage de $\pi/2$. (ω représente la pulsation, en rad/s et t le temps).

6. L'énergie cinétique en mécanique relativiste a pour expression : $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ (voir ex. 1). Montrer à l'aide d'un D.L. que l'expression classique $E_c = mV^2/2$ est vérifiée pour V << c.

7. Charge d'un condensateur pendant une durée brève :
La charge q(t) contenue dans un condensateur de capacité C et soumis à une tension E, initialement déchargé, évolue selon la loi : $q(t) = CE(1 – \exp(-t/RC))$, R étant la résistance du circuit. Tracer l'allure de q(t).
Montrer que si l'on observe cette charge sur une durée suffisamment brève, elle est assimilable à une rampe linéaire. Donner un ordre de grandeur de l'écart existant entre les deux modèles pour une durée $\Delta t = \tau/10$ où $\tau = RC$, constante de temps du circuit.
R : $q(t) \approx CE(1-(1-t/RC)) = E.t / R$ *si* $t << RC$.

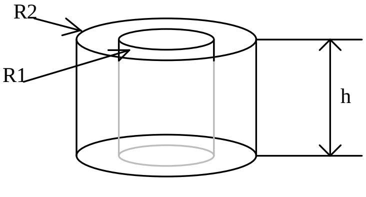
Différentielles :

8. Pour s'entraîner (« drills ») :
Calculer les différentielles des fonctions suivantes (les variables sont données entre parenthèses) :
$f(x) = 3\alpha.x^3 + 1/x + 2$; $f(x) = x.\exp(x^2)$; $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2+2)$; $f(x) = 1/\sin x$
$f(x,y) = x^2y + x/y – y$
Calculer la variation de volume dV occasionnée :
- par la variation dr du rayon d'une sphère ($V = 4/3.\ \pi.r^3$);
- par les variations respectives dr et dh du rayon et de la hauteur d'un cylindre ($V = \pi r^2h$).
R : $9\alpha x^2\, dx – dx / x^2$; $\exp(x^2).dx + 2x^2.\exp(x^2).dx$; $6x.dx / (x^2+2)^2$; $-\cos x.dx/\sin^2 x$;
$df = 2xy.dx + dx/y + x^2dy – x.dy / y^2 - dy$
$dV = 4\pi r^2dr$; $dV = 2\pi rh.dr + \pi r^2.dh$

9. Variation du poids avec l'altitude :
$P = mg = mg_0R^2/(R + z)^2$, g_0 étant l'accélération de la pesanteur à la surface du sol, R le rayon terrestre et z l'altitude. Calculer les variations dP et dP/P consécutives à une variation dz de l'altitude z.
Calculer ΔP pour $\Delta z = 8$ km, en partant de z = 0. On donne $g_0 = 9{,}8\ ms^{-2}$ et R = 6400 km.

10. Dilatation d'un condensateur :
La capacité d'un condensateur cylindrique s'exprime par : $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$
(on néglige les effets de bord)

Ce condensateur est constitué de deux électrodes cylindriques coaxiales, schématisées ci-contre.



Une variation de température Δt entraîne une variation des dimensions du condensateur.
Toute mesure de longueur a relative au condensateur dépend de la température t selon la loi : $a = a_0 (1 + \lambda t)$, λ étant le coefficient de dilatation linéaire.
En déduire la loi de variation de la capacité C ainsi que la variation ΔC produite par une évolution Δt de t..

R : $C = 2\pi\varepsilon_o h_o(1 + \lambda t) / \ln(R_{2o}/R_{1o})$. $dC = \lambda.C_o.dt$.

11. Période d'oscillation d'un pendule :

1) Un pendule, formé d'un fil de longueur L auquel est suspendu une masse m oscille avec une période $T_o = 2\pi\sqrt{L/g}$. Quelle est la variation relative de T_o pour un allongement relatif de L de 1 % ?

2) La pesanteur g s'exprime selon $g = g_o \dfrac{R^2}{(R+z)^2}$ en fonction de l'altitude z, R étant le rayon terrestre (R = 6400 km ; g_o = 9,81 m/s²). Quelle variation de période observe-t-on sur le pendule si l'on augmente l'altitude de Δz = 1000 m à partir de z = 0 ?

R : 1) $\Delta T_o / T_o$ = 0,5 % ; 2) $\Delta T_o / T_o$ = 0,016 % .

12. Régulation de tension :

Un montage régulateur de tension, alimenté par une source de tension E subissant des fluctuation δE délivre en sortie la tension : $U_F = \dfrac{R_d E + RU_0}{R + R_d}$, où R et R_d sont des résistances et U_D est une valeur constante, caractéristique d'un des composants du montage (tension Zener de la diode).

Représenter l'allure de $U_F(t)$ quand la source de tension subit des fluctuation sinusoïdale d'amplitude δE.

Calculer le facteur de régulation $f_O = \delta E / \delta U$ et le taux d'ondulation de la tension U aux bornes de la diode si l'alimentation délivre une tension redressée de + ou - 0,2 V autour de la valeur moyenne 6 V. On donne R = 220 Ω ; R_d = 10 Ω ; U_D = 4,2 V.

Calculs d'incertitude :

13. Une mesure précise de la masse d'un objet donne m = 43,237 kg. On donne la valeur de l'accélération de la pesanteur g_o = 9,81 ms^{-2}. Quel est le poids de l'objet ? 424 N ; 424,155 N ou 424,2 N ? Proposer un encadrement de cette valeur.

14. R_1 et R_2 sont deux résistances montées en parallèle. R_1 = 2.200 Ω et R_2 = 120Ω à 10% près. Calculer la valeur de la résistance équivalente à cette association et l'incertitude correspondante. Montrer que l'on surestime cette incertitude si on ne tient pas compte des erreurs liées.

15. Un circuit RLC série a pour fréquence propre : $f_o = 1/T_o = 1/(2\pi\sqrt{LC})$. On dispose de composants de valeurs définies à 5 % près, avec : L = 10 mH et C = 10 nF.

Quelle(s) valeur(s) s'attend-on à mesurer pour f_o ? La mesure de la période propre T_o est réalisée avec une incertitude relative de 2 %. Quelles conclusions tirer pour les valeurs suivantes, calculées à partir de mesures expérimentales ?

f_1 = 15130 Hz ; f_2 = 17029 Hz ; f_3 = 14760 Hz ; f_4 = 17123 Hz.

16. Dans la méthode de Bessel, la distance focale image f' d'une lentille mince est déterminée à partir de la distance D entre l'objet lumineux et l'écran et de la distance l entre les deux positions de la lentille pour lesquelles on obtient une image nette à l'écran (l < D).

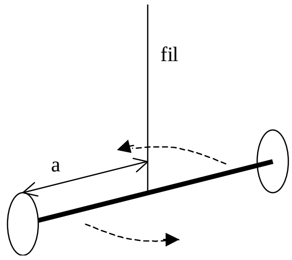
On montre que : $f' = \dfrac{D^2 - l^2}{4D}$. Evaluer l'incertitude relative sur f'.

A.N. : D = 1m ; l = 30 cm ; ΔD = 1 mm ; Δl = 1 cm.

$R : \dfrac{\Delta f'}{f'} = \dfrac{D^2 + L^2}{D^2 - l^2}\dfrac{\Delta D}{D} + \dfrac{2l}{D^2 - l^2}\Delta l$

17. La constante de torsion C d'un fil métallique peut être déterminée par la méthode des oscillations, consistant à mesurer la période d'un pendule de torsion constitué du fil auquel on suspend une tige chargée de deux masselottes identiques, de masse m, placées à une distance a du point d'attache. En relevant deux mesures de périodes T_1 et T_2 pour deux valeurs a_1 et a_2 de a, il vient : $C = 8\pi^2 m \dfrac{a_2{}^2 - a_1{}^2}{T_2{}^2 - T_1{}^2}$. Les mesures ont donné : m = (354,0 ± 0,5)g et :

- pour a_1 = (17,3 ± 0,2) cm, T_1 = (14,3 ± 0,1) s ;
- pour a_2 = (37,3 ± 0,2) cm, T_2 = (17,6 ± 0,1) s.



Calculer C et l'incertitude sur C.

Quelle valeur doit-on prendre pour π dans ce calcul ?

Sur quel critère doit-on jouer en priorité pour améliorer la qualité de la mesure de C ?

R : $\dfrac{\Delta C}{C} = 2\dfrac{\Delta \pi}{\pi} + \dfrac{\Delta m}{m} + \dfrac{2\Delta a}{|a_2 - a_1|} + \dfrac{2\Delta T}{|T_2 - T_1|}$

Equations différentielles :

18. Un condensateur de capacité C est chargé à travers un résistor de résistance R par un générateur de tension de fém E. Former l'équation du circuit : $\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{RC} = \dfrac{E}{R}$. Exprimer alors l'évolution de la charge q du condensateur en fonction du temps si à t = 0, q = q_o.

19. Une particule de masse m est soumise à l'action de la pesanteur g. Elle subit durant son déplacement une force de frottement de forme f = -kv, proportionnelle à sa vitesse. La trajectoire est supposée rectiligne. Montrer que la vitesse de la particule va évoluer vers une vitesse limite. Au bout de combien de temps la particule a-t-elle une vitesse égale à la moitié de sa vitesse limite ?

20. Une masse m glisse sans frottement sur un axe (Ox) horizontal. Elle est fixée à un support immobile par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur l. Former l'équation du mouvement et exprimer l'équation horaire x(t) pour les conditions initiales suivantes :

a) x(t =0) = a + l et v(t = 0) = 0 b) x(t = 0) = l et v(t = 0) = v_o.