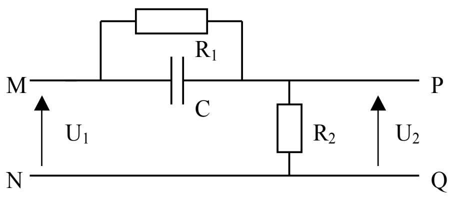
FILTRES -TRANSFERT D'UN SYSTEME LINEAIRE



1. On associe les grandeurs complexes $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_2$ aux signaux alternatifs sinusoïdaux respectifs $u_1(t)$ et $u_2(t)$, de pulsation ω.

a) Calculer le transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ du circuit et déterminer en fonction de R_1 et R_2 le coefficient A tel que $\underline{H}(j\omega) = \underline{U}_2 / \underline{U}_1 = (1 + j.v) / (A + j.v)$ où $v = R_1.C.\omega$.

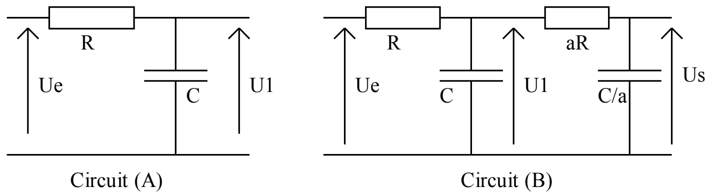
b) Les caractéristiques du circuit étant : $R_1 = 1000\ \Omega$; $R_2 = 1/3\ R_1$ et $C = 0{,}47\ \mu F$; tracer la courbe du gain en décibel G_{dB} en fonction de log(v) et calculer la fréquence de coupure à -3 dB.

c) La fém. $\underline{U}_1$ étant donnée, montrer que l'on peut ramener le circuit, vu des bornes P et Q , à une représentation de Thévenin et exprimer la fém $\underline{E}_1$ et l'impédance interne $\underline{Z}_1$ du générateur de Thévenin équivalent.

d) On branche le circuit en sortie sur un dipôle d'impédance $\underline{Z}_L$. Quelle valeur faut-il donner à $\underline{Z}_L$ pour maximiser la puissance moyenne qui sera débitée dans ce dipôle ?

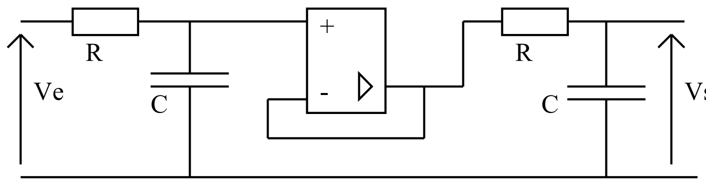
2. Circuits RC en cascade :

Soient les circuits suivants :



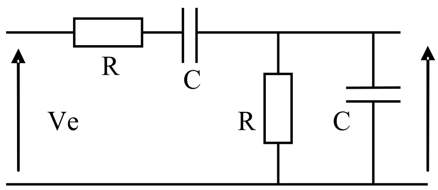
1°) Déterminer l'expression du transfert $H_1(j\omega) = U_1/U_e$ pour le circuit (A), en fonction de ω et $\tau = RC$. Que devient ce transfert si l'on change R en aR et C en C/a ?

2°) On interpose un montage suiveur entre deux cellules RC.
Exprimer la fonction de transfert de l'ensemble : $H(j\omega) = v_s / v_e$.



3°) Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega) = U_s/U_e$ pour le montage (B) en fonction de ω, τ = RC et le coefficient sans dimension a.(a est une constante positive). Discuter l'influence de a sur cette fonction de transfert $H(j\omega)$.Calculer la quantité $[H_1(j\omega)]^2$. Conclusions ?

3. Etude d'un filtre de Wien.



On alimente le circuit suivant par une tension alternative $V_e(t)$ d'amplitude constante et de pulsation ω variable.
On posera $x = RC\omega = \omega / \omega_o$

a) Exprimer $H(j\omega) = V_s / V_e$ et le mettre sous la forme $1 / (X + j.Y)$.

b) Calculer le gain et le déphasage de V_s par rapport à V_e en fonction de x.

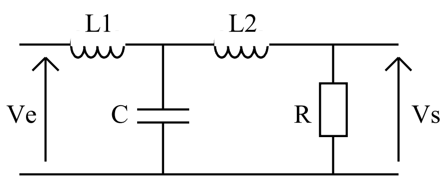
c) Exprimer le gain maximum du montage et le déphasage correspondant.

d) Déterminer les fréquences de coupure et en déduire la bande passante du circuit. Calculer le déphasage correspondant à ces fréquences de coupure.

e) Tracer le diagramme de Bode de ce circuit.

Applications numériques : $R = 1{,}5\ k\Omega$ et $C = 0{,}5\ \mu F$.

4. Circuits "en T chargé", filtres de Butterworth :



1) Calculer la fonction de transfert du montage ci-contre, après avoir prévu sans calcul la nature de ce filtre. R étant fixée, déterminer les valeurs de L_1, L_2 et C permettant

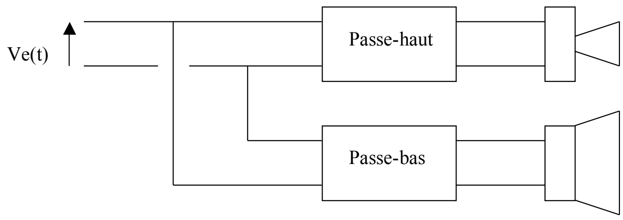
d'identifier cette fonction de transfert à l'expression : $H_B(j\omega) = \dfrac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}$ où $jx = j\omega/\omega_O$, ω_O étant fixé.

Calculer le module du transfert $H(\omega)$. Tracer la courbe de gain en diagramme de Bode.

2) On envisage maintenant le montage obtenu en remplaçant C par une inductance L et les inductances L_1 et L_2 par des capacités C_1 et C_2 ? Quelles sont les caractéristiques de ce filtre ? Moyennant un choix adapté des valeurs de L, C_1 et C_2 on obtient une fonction des transfert :

$H_H(j\omega) = \dfrac{(jx)^3}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}$. Tracer la courbe de gain correspondante.

3) La séparation des voies d'une enceinte de chaîne hi-fi, permettant de transmettre les graves et les aigüs à des haut-parleurs adaptés est schématisée ci-contre.



Les filtres employés sont ceux étudiés précédemment, la résistance de charge R correspondant à l'impédance d'entrée de chacun des deux haut parleur. On teste la sélectivité des voies en appliquant en entrée un signal :

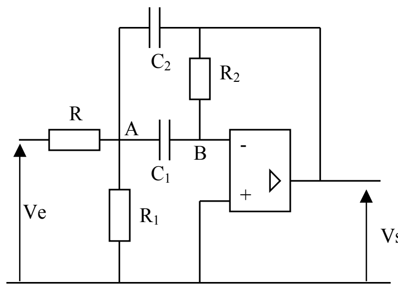
$V_e(t) = E.\cos(0{,}1\omega_o t) + E.\cos(10\omega_o t)$

Quelles sont les tensions appliquées à chaque voie ? (on ne demande pas un calcul explicite de leur phase). Donner, en décibels, la valeur du rapport des tensions efficaces des deux harmoniques du signal de sortie.

5. filtre passe-bande :

1°) Etudier directement les comportements en haute fréquence et en basse fréquence du filtre ci-contre.

2°) Etablir la fonction de transfert de ce filtre, donnée ci-dessous.



$$H(j\omega) = \frac{-R_2/R}{1 + \dfrac{C_2}{C_1} + jR_2C_2\omega + \dfrac{1 + \dfrac{R_1}{R}}{jR_1C_1\omega}}$$

$$H(j\omega) = \frac{-H_o}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_o} - \dfrac{\omega_o}{\omega}\right)}$$ En identifiant à l'expression canonique :

on obtient : $\omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{RR_2C_1C_2}}\sqrt{\dfrac{R + R_1}{R_1}}$ et pour facteur de qualité : $Q = \sqrt{\dfrac{R_2C_2}{RC_1}}\sqrt{\dfrac{R + R_1}{R_1}}\dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$

Calculer ω_o et Q pour $R = R_2 = 100\ k\Omega$, $R_1 = 1\ k\Omega$, $C_1 = C_2 = 2{,}2\ nF$.

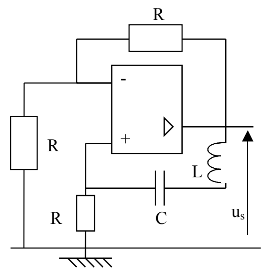
3°) Etablir le diagramme de Bode de la fonction de transfert.

6. filtrage passe-bande : Un filtre répond à la fonction de transfert : $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_o} - \dfrac{\omega_o}{\omega}\right)}$

On applique à l'entrée du filtre une tension créneau de pulsation ω, que l'on peut représenter par sa décomposition de Fourier : $e(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dfrac{2A}{\pi(2p+1)}\cos(2p+1)\omega t$

Qu'observe-t-on en sortie de filtre lorsque l'on fait varier continuement la pulsation ω de $0{,}1.\omega_o$ à $2\omega_o$? Examiner en particulier les cas $\omega = 0{,}2\omega_o$; $\omega = \omega_o$ et $\omega = 2\omega_o$. On suppose Q = 5.

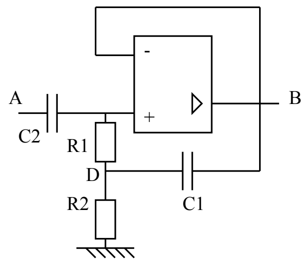
7. Stabilité d'un circuit :



Dans le montage représenté ci-contre, l'A.O. est supposé idéal, et fonctionne en régime linéaire.
Etablir l'équation différentielle vérifier par la tension $u_s(t)$ à partir d'une étude en RSF (notation complexe).

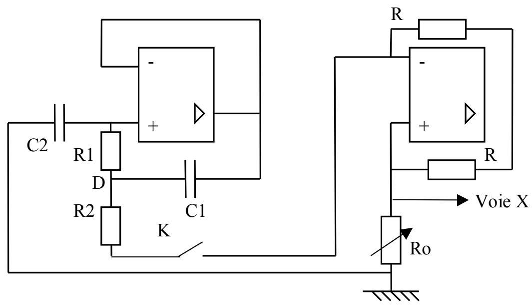
Le circuit proposé est-il stable ?

8. Simulation d'un circuit R,L,C ; oscillateur :



1°) On envisage le circuit suivant, où l'ampli op. est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.
a) Calculer l'impédance d'entrée de ce circuit.
b) Montrer qu'il est équivalent à un circuit $R_{éq}$, $L_{éq}$, $C_{éq}$ série dont on déterminera les éléments.
c) Donner l'expression de la pulsation de résonance ω_o du circuit. Calculer son facteur de qualité Q_o.

2°) a) Le circuit précédent est soumis à l'action d'un G.B.F. de fréquence f réglable. Donner les courbes de réponse fréquentielle I(f) et -φ(f) où I est le module du courant traversant le générateur et -φ le déphasage de ce courant par rapport à la tension u_g aux bornes du G.B.F.



b) Le circuit précédent est débranché du générateur et associé à un montage "à résistance négative" selon le schéma suivant ; la sortie du montage étant bouclée sur son entrée.
On s'intéresse au courant traversant le circuit, que l'on observe par l'intermédiaire de la tension aux bornes de la résistance R_o.
Former l'équation différentielle du circuit et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha\omega_o\frac{di}{dt} + \omega_o{}^2 i(t) = 0$$

Discuter du comportement du circuit selon les valeurs données à R_o. Etablir la condition d'oscillation du système. Que se passe-t-il, quand cette condition est réalisée, à la fermeture de l'interrupteur K. Représenter le portrait de phase correspondant.

<u>**Réponses :**</u>

(1) a) $v = R_1C\omega$ et $A = 1 + R_1/R_2$. b) G(dB) = 10 log(1 + v²) - 10 log(16 + v²). Fréquence de coupure : υ_c = 1266 Hz. c) Générateur de Thévenin équivalent : $\underline{Z}_{éq} = R_1/A + jv$ et $\underline{U}_{éq} = \underline{U}_1(1 + jv)/(A + jv)$. d) Prendre $\underline{Z}_L$ = conjugué($\underline{Z}_{éq}$) (situation analogue vue en cours)

(2) $H(j\omega) = [1- \omega^2\tau^2 + j\omega\tau\ (2 + 1/a)]^{-1}$.Si a tend vers l'infini, alors $H(j\omega) = [H_1(j\omega)]^2$, car le quadripôle (aR,C/a) ne charge plus le quadripôle (R, C) situé en amont. Cette situation est obtenue d'une autre façon en 2)° : on interpose le montage suiveur, dont l'impédance d'entrée est très forte.

(3) a) $H(j\omega) = 1/[3 + j(x - 1/x)]$. c) Maximum du gain pour x = 1/x. Alors Vs et Ve sont en phase et Vs = Ve/3. d) Fréquences de coupure : f_1 = 64 Hz et f_2 = 701 Hz. Courbe de gain en "V" inversé.

(4) 1) Par les lois de Kirchoff : $H(j\omega) = R/\left(R + j(L_1 + L_2)\omega - L_1RC\omega^2 - jL_1L_2C\omega^3\right)$; en identifiant : $L_1 = 3R/2\omega_o$; $L_2 = R/2\omega_o$; $C = 4/3R\omega_o$. $H(\omega) = 1/\sqrt{1+(\omega/\omega_o)^6}$
Filtre passe-bas, la courbe de gain présente une pente à –60 dB/décade.
2) filtre passe-haut. $H(\omega) = (\omega/\omega_o)^3/\sqrt{1+(\omega/\omega_o)^6}$; pente à + 60 dB/décade.
3) La voie aigüe reçoit un terme de pulsation $0{,}1\omega_o$ d'amplitude 0,001.E et un terme de

(5) Appliquer le théorème de Millman en A puis en B, ou écrire les lois de maille et de nœud dans le circuit. $\omega_o = 45680$ rad/s ; Q = 5 ; $H_o = 1/2$.

(6) La tension en sortie de filtre passe par des valeurs non nulles lorsque l'une des valeurs $\omega(2p+1)$ est égale à ω_o. L'amplitude vaut alors $A/(\pi(2p+1))$.

(7) Par une étude en notation complexe : $(1 - jRC\omega - LC\omega^2).V_s = 0$; d'où l'équation différentielle du circuit. Comme –RC et LC sont de signes opposés, le circuit est instable.

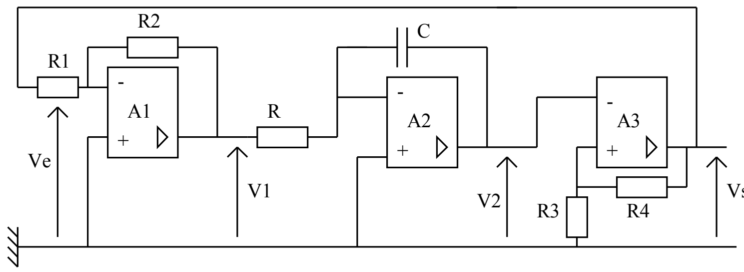
(8) 1°) a) & b) Calculer $Z_e = V_e/i_e$, V_e étant la tension entre A et la masse et i_e le courant d'entrée, traversant C_2. Par identification : $R_{éq} = R_1 + R_2$, $L_{éq} = R_1R_2C_1$, et $C_{éq} = C_2$. c) $\omega_o = 1/\sqrt{L_{éq}C_{éq}}$ et $Q_o = L_{éq}\omega_o/R_{éq}$.
2°) a) Réponse fréquentielle classique d'un dipôle RLC, avec résonance pour $\omega = 1/\sqrt{L_{éq}.C_{éq}}$
b) Si $R_o = -R_{éq} = -(R_1 + R_2)$, Q_o tend vers l'∞, on a un oscillateur harmonique non amorti : des oscillations sinusoïdales apparaissent spontanément dans le système.
(voir aussi TP oscillateurs quasi-sinusoïdaux)

A.O. EN REGIME NON LINEAIRE :

Ce type de montage sera étudié en TP-cours. On propose ci-après un exercice sur ce thème.

9. Oscillateur de relaxation :

On considère le montage suivant, où les ampli op. A1, A2 et A3 sont considérés comme idéaux.



1°) A l'instant t = 0, la tension de sortie V_s est égale à $V_s = +V_{sat}$. Le condensateur de capacité C n'est pas chargé. Etudier l'évolution de $V_2(t)$ jusqu'au basculement de $V_s(t)$.

2°) Tracer, en concordance de temps et pour deux périodes, les graphes des fonctions $V_s(t)$, $V_1(t)$ et $V_2(t)$. Déterminer la fréquence des signaux obtenus.

(9) **Réponse** : Repérons d'abord les fonctions des montages relatifs aux différents A.O. : A1 : montage amplificateur inverseur, A2 : montage intégrateur et A3 : montage comparateur à hystérésis. Notons que Vs = Ve.
En supposant $V_2(0) = 0$ et $Vs = +V_{sat}$ en t = 0 : $V_2(t) = (R_2V_{sat}/R_1RC).t$ jusqu'à un premier basculement du comparateur, quand V_2 atteint la valeur : $\beta.V_{sat}$ avec $\beta = R_3/(R_3 + R_4)$. Puis V_2 va décroître linéairement avec le temps jusqu'au basculement suivant, qui aura lieu quand V_2 atteint la valeur $-\beta.V_{sat}$. $V_2(t)$ remonte alors linéairement avec le temps ; on se retrouve alors à la situation initiale.