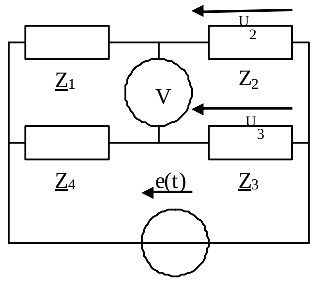
Régime Sinusoïdal Forcé (2° série) – Réseaux, Résonance, Puissance (Corrigé).

N.B. : Sauf mention contraire, les grandeurs employées sont a priori complexes.

1. Etude d'un pont de mesure :



Calculons la tension aux bornes du voltmètre : $u_V = u_2 - u_3$; en remarquant que comme le voltmètre n'est traversé par aucun courant, les impédances Z_1 et Z_2 d'une part et Z_3 et Z_4 d'autre part sont en série, donc que la relation du pont diviseur de tension s'applique : $u_V = \dfrac{Z_2 e}{Z_1 + Z_2} - \dfrac{Z_3 e}{Z_3 + Z_4}$

Soit après simplification : $u_V = \dfrac{(Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3)e}{(Z_1 + Z_2).(Z_3 + Z_4)}$

u_V va s'annuler à condition d'avoir : $(Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3) = 0$ soit : $Z_2 Z_4 = Z_1 Z_3$ (1)

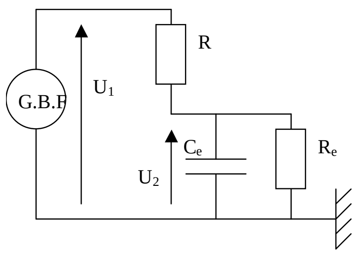
Appliquons ceci à la structure proposée : $Z_1 = r + jL\omega$; $Z_2 = P$; Z_3 s'obtient en calculant d'abord l'admittance : $Y_3 = (1/R) + jC\omega$ d'où $Z_3 = \dfrac{R}{1 + jRC\omega}$ et enfin $Z_4 = Q$

D'après (1), on tire l'équation :

$$PQ + jPQRC\omega = rR + jRL\omega$$

soit en identifiant parties réelles et parties imaginaires : $r = PQ/R$ et $L = PQC$

2. Mesure de l'impédance d'entrée d'un oscilloscope :



R_e et C_e sont associés en dérivation. Leur impédance équivalente vaut :

$$Z_e = \frac{R_e \dfrac{1}{jC_e\omega}}{R_e + (1/\,jC_e\omega)} = \frac{R_e}{1 + jR_eC_e\omega}$$

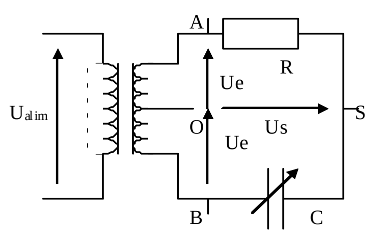
Le calcul de U_2 peut ensuite se faire en employant la relation du diviseur de tension : $U_2 = \dfrac{Z_e U_1}{R + Z_e}$

dont on tire : $\dfrac{U_1}{U_2} = 1 + \dfrac{R}{R_e} + jRC_e\omega$. Les mesures faites donnent U_{1eff} et U_{2eff} ; leur rapport est le module du rapport des tensions complexes : $\dfrac{U_{1eff}}{U_{2eff}} = \sqrt{\left(1 + \dfrac{R}{R_e}\right)^2 + (RC_e\omega)^2}$

On tire finalement : $C_e = \dfrac{1}{R\omega}\sqrt{\left(\dfrac{U_{1eff}}{U_{2eff}}\right)^2 - \left(1 + \dfrac{R}{R_e}\right)^2}$

A.N. : C_e = 15,0 pF.

3. Circuits déphaseurs :



1°) Aucune considération n'est nécessaire concernant le fonctionnement du transformateur à point milieu. Il suffit de prendre en compte le fait qu'il délivre en sortie deux tensions identiques U_e respectivement entre les bornes AO et OB.

Dans la maille OAS : $U_e = Ri + U_S$

Dans la maille OSB : $U_e = (1/jC\omega).i - U_S$ (attention aux orientations)

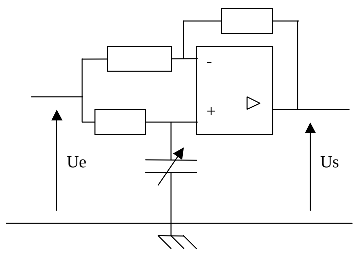
En éliminant i entre les deux équations, on obtient :

$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

Le rapport des modules est le module des rapports : $\left|\dfrac{U_s}{U_e}\right| = \dfrac{|1 - jRC\omega|}{|1 + jRC\omega|} = \dfrac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} = 1$

L'avance de phase de $u_s(t)$ par rapport à $u_e(t)$ est $\varphi = \arg(1 - jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega) = -2\,\text{atan}(RC\omega)$.

L'intérêt de ce montage est d'introduire un déphasage entre sortie et entrée, dont la valeur est réglable à volonté (par exemple en jouant sur C) tout en ayant même amplitude des tensions d'entrée et de sortie. Ceci peut trouver une application en électrotechnique, pour l'alimentation des bobinages de moteurs électriques.

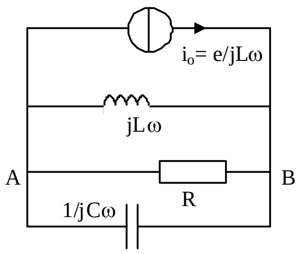


2°) La mise en équation d'un circuit avec A.O. se fait avec la même méthode en RSF qu'en régime permanent, puisque l'emploi des impédances complexes permet d'introduire une relation linéaire entre courants et tensions.
L'AO est en rétroaction, donc en régime linéaire, et supposé idéal : $i_+ = i_- = 0$ et $V_+ = V_-$.
En remarquant le diviseur de tension (R,C) alimenté sous la tension u_e, on obtient : $V_+ = u_e \dfrac{1}{1+jRC\omega}$

En écrivant le théorème de Millman au niveau de l'entrée inverseuse de l'AO : $V_- = \dfrac{u_e + u_s}{2}$

L'équation $V_+ = V_-$ conduit à $\dfrac{U_s}{U_e} = \dfrac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$

La relation entre sortie et entrée est formellement identique au circuit étudié au 1., avec les même propriété (déphasage sans modification d'amplitude). Mais le domaine d'application est complètement différent. On n'a pas ici un circuit de puissance. Le montage concerne ici le traitement d'un signal d'entrée. Le déphasage va varier en fonction de la fréquence du signal, ce qui peut être employé dans un circuit de commande, ou de modulation.

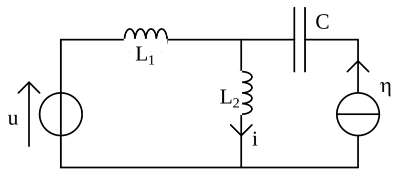


4. a) Le circuit équivalent est représenté ci-contre.
On reconnaît un pont diviseur de courant.

$$i_R = \frac{1/R}{(1/R)+(1/jL\omega)+jC\omega}\frac{e}{jL\omega} = \frac{e/R}{1-LC\omega^2+\dfrac{jL\omega}{R}}$$

(au besoin, on peut établir le même résultat en écrivant la loi des nœuds).

b) Pour que i(t) soit indépendant de R, il faut $1 - LC\omega^2 = 0$ soit $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.



5. On donne : $u(t) = 220\sqrt{2}\cos 100\pi t$ (Volt) ; $L_1 = 1{,}0$ H ; $L_2 = 2{,}0$ H ;
C = 10 μF ; $\eta(t) = \sqrt{2}\sin 100\pi t$ (Ampère).
Soit en notation complexe : $u = 220\sqrt{2}.\exp(j\omega t)$ avec $\omega = 100\pi$ rad.s^{-1}
et $\eta = \sqrt{2}.\exp(j\omega t).\exp(-j\pi/2) = \sqrt{2}.\exp(j\omega t).(-j)$.
1. Par le théorème de superposition (Helmholtz) :
en éteignant le générateur de tension de fém u, on a pour i une contribution i_1 due au seul générateur de courant : $i_1 = \dfrac{L_1}{L_1+L_2}\eta$

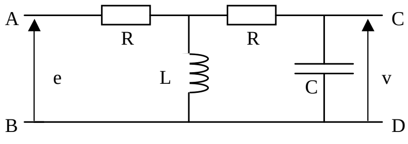
en éteignant le générateur de courant de cém η, on a pour i une contribution i_2 due au seul générateur de tension: $i_2 = \dfrac{u}{j(L_1+L_2)\omega}$

Remarquons que la présence du condensateur C n'a aucune incidence dans ces questions.

Par superposition : $i = i_1 + i_2$ mène, après calculs à l'expression $i = \left[\dfrac{-j\sqrt{2}L_1}{L_1+L_2} - \dfrac{j220\sqrt{2}}{(L_1+L_2)\omega}\right]\exp(j\omega t)$

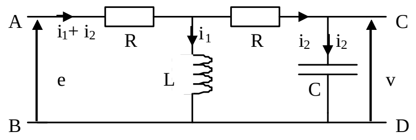
On détermine l'amplitude et la phase à l'origine de i(t), et l'on obtient l'expression numérique :
$i(t) = 0{,}57\ \sqrt{2}\cos(100\pi t-\pi/2) = 0{,}57\ \sqrt{2}\sin 100\pi t$.

6. On envisage le circuit suivant, alimenté entre A et B par une source de tension sinusoïdale e(t) = E.cos (ω.t)



a) En progressant par associations successives : R en série avec C , puis (R,C) en dérivation sur L, puis (R,C,L) en série avec R,
on obtient successivement : $Z_{RC} = R + (1/jC\omega)$
puis $Y_{L,RC} = (1/jL\omega) + 1/Z_{RC}$ (les admittances s'additionnent pour deux dipôles associés en dérivation) soit après calcul : $Z_{L,RC} = jL\omega(1 + jRC\omega) / (jRC\omega + 1 - LC\omega^2)$

et l'on aboutit ainsi à :



Ze = R + jLω(1 + jRCω) / (jRCω + 1 - LCω²)

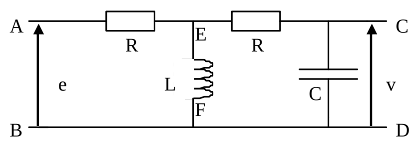
(b) En introduisant des courants et écrivant les lois de noeud et de maille :

$$e = R(i_1 + i_2) + jL\omega.i_1$$

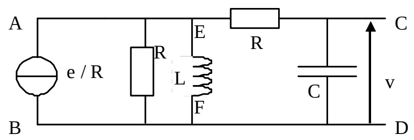
$jL\omega.i_1 = v + Ri_2$ avec $v = \dfrac{1}{jC\omega}.i_2$

En éliminant i_1 et i_2 entre les équations, on aboutit à : $v = \dfrac{\underline{e}.jL\omega / R}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega + (jL\omega / R)(1 + jRC\omega)}$

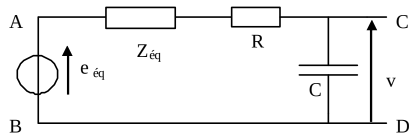
deuxième méthode :
En utilisant les représentations de Thévenin et Norton pour simplifier le circuit :



Vue des points E et F, l'association (R, L) alimentée sous la tension e entre A et B peut se ramener à



L'association de R en dérivation sur L a une impédance équivalente $Z_{éq}$ = jRLω/(R + jLω).
En repassant en représentation de Thévenin :

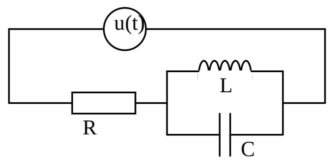


On retouve la situation d'un diviseur de tension.

$$v = \frac{\frac{1}{jC\omega} e_{éq}}{Z_{éq} + R + \frac{1}{jC\omega}}$$

Après voir explicité l'expression, on obtient : $v = \dfrac{\underline{e}.jL\omega / R}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega + (jL\omega / R)(1 + jRC\omega)}$

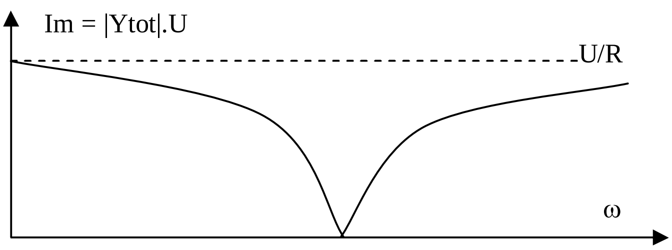
7. Circuit "bouchon" :



L'admittance de L en dérivation sur C vaut : $Y_{//}$ = jCω + (1/jLω)
L'impédance de l'ensemble est donc : $Z_{tot} = R + \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$
En réduisant au même dénominateur puis en prenant l'expression inverse, on tire l'admittance pour l'ensemble : $Y_{tot} = \dfrac{1 - LC\omega^2}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$

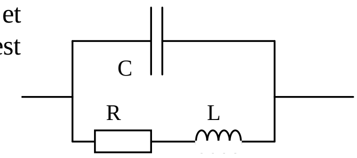
L'amplitude de l'intensité $I_m = |Y_{tot}| = Y_{tot} = \dfrac{|1 - LC\omega^2|}{\sqrt{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}$

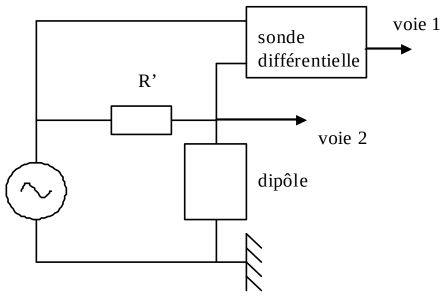
Pour ω << $1/\sqrt{LC}$: $|Y_{tot}| \approx 1/R$ (on peut aussi envisager le modèle BF du circuit)
Pour ω = $1/\sqrt{LC}$: $|Y_{tot}| = 0$
Pour ω >> $1/\sqrt{LC}$: $|Y_{tot}| \approx 1/R$ (on peut aussi envisager le modèle HF du circuit)



8. Etude d'une association RLC :

1. Il faut mesurer Z = u / i donc accéder à la tension sur le dipôle et l'intensité le traversant. L'emploi d'un montage à sonde différentielle est nécessaire.





Les mesures d'amplitude donnent |Z| = U / (U'/R') ; celles de phase donnent φ = arg(Z) correspondant à l'avance de phase de u(t) sur u'(t).

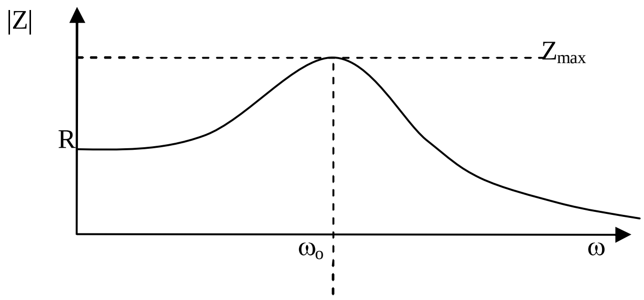
2. Admittance de l'association : $Y = jC\omega + \dfrac{1}{R + jL\omega}$ d'où $Z = \dfrac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

En module : $|Z| = \dfrac{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$

Pour ω << $1/\sqrt{LC}$: |Z| ≈ R (on peut aussi envisager le modèle BF du circuit)

Pour ω = $1/\sqrt{LC}$: |Z| = Z_{max}

Pour ω >> $1/\sqrt{LC}$: |Z| ≈ 0 (on peut aussi envisager le modèle HF du circuit)



3. La mesure de Z à ω = 0 donne R = 3,14 kΩ. Z_{max} est obtenu à ω = $1/\sqrt{LC}$, pulsation pour laquelle $(1 - LC\omega^2) = 0$. Il vient $Z_{max} = \dfrac{\sqrt{R^2 + 1/(C\omega_o)^2}}{RC\omega_o}$ dont on tire une équation bicarrée sur C.

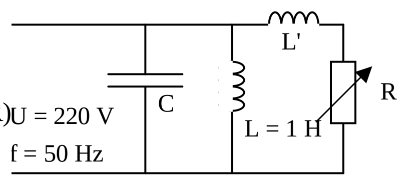
Numériquement : $4{,}02.10^{34}.C^4 - 7{,}62.10^{16}.C^2 - 1 = 0$ qui admet une seule solution positive : $C^2 = 6{,}02.10^{-18}$ d'où C = 2,45 nF. On déduit L 53 mH.

9. Puissance dans un réseau :

Exprimons d'abord la puissance dissipée en moyenne dans ce réseau :

$P = RI_R^2$

L'intensité efficace I_R se calcule aisément en remarquant que la branche (L',R) est alimentée sous la tension u(t) de valeur efficace U.



D'où : $P = \dfrac{RU^2}{R^2 + (L'\omega)^2}$ (1)

P sera maximale si : dP/dR = 0. Le calcul mène à la condition : R = L'ω d'où L = R / ω = 38 mH.

Alors $P = P_{max} = U^2/2R$ = 2,0 kW.

Le texte donne pour information que P = 800 W pour une valeur de R > 12 Ω.

D'après (1) on tire une équation du 2° degré sur R : $R^2 - (U^2/P)R + (L'\omega)^2 = 0$

dont les solutions valent numériquement R = 2,5 Ω ou R = 58 Ω. On retient la seconde solution.

Le facteur de puissance cosφ = 1 pour φ = 0, soit si l'admittance du réseau est réelle.

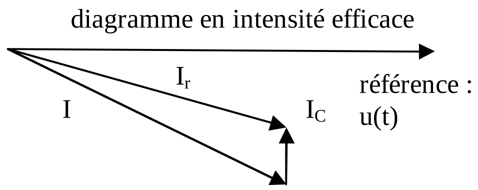
On calcule : $Y = jC\omega + \dfrac{1}{jL'\omega} + \dfrac{1}{jL'\omega + R} = \dfrac{R}{R^2 + (L'\omega)^2} + j\left[C\omega - \dfrac{1}{L\omega} - \dfrac{L'\omega}{R^2 + (L'\omega)^2}\right]$

La condition Im(Y) = 0 donne : $C = \dfrac{1}{L\omega^2} + \dfrac{L'}{R^2 + (L'\omega)^2}$ AN : C = 21µF.

10. Puissance active. Facteur de puissance. Méthode des trois ampèremètres.

1. P = UI.cosφ donne cosφ = P/(U.I). AN : cosφ = 0,78

2. a) Le moteur constitue un circuit inductif (retard de $i_M(t)$ par rapport à u(t)). L'intensité traversant le condensateur sera par contre en quadrature avance sur u(t).
Notons φ l'avance de phase de u(t) sur i(t) en l'absence du condensteur et φ' celle obtenue après son branchement en dérivation sur l'installation.
Soit φ' =acos(0,92).



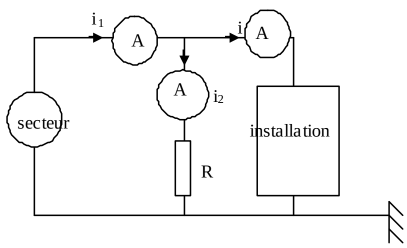
On s'appuie sur la relation « vectorielle » traduisant la loi des nœuds sur ce graphe : $\underline{I_r} = \underline{I} + \underline{I_C}$.
En projetant sur l'axe de u(t) (horizontal) : I_r.cosφ' = I.cosφ
et sur la direction orthogonale : I_r.sinφ' = -I_C + I.sinφ avec I_C = Cω.U
On tire après calculs : C = UI.cosφ (tanφ - tanφ')/(U²ω) où UI.cosφ = P.

b) Notons Z = R + jX l'impédance complexe du moteur. Le cosφ correspond alors à tanφ = X/R.
La mise en dérivation du condensateur amène une impédance complexe globale :

$$Z' = \frac{R + j\left[X - \left(R^2 + X^2\right)C\omega\right]}{\left(1 - XC\omega\right)^2 + (RC\omega)^2}$$

Le nouveau facteur de puissance cosφ' correspond à : $\tan\varphi' = \dfrac{X - \left(R^2 + X^2\right)C\omega}{R}$

Il vient : tanφ' = tanφ - Cω|Z|²/R avec |Z| = U / I ; d'où finalement : C = P (tanφ - tanφ')/(U²ω) car RI² = P.
La valeur de I_r s'obtient aisément par I_r = P/(U.cosφ').
AN : I_r = 27,2 A et C = 135 µF.

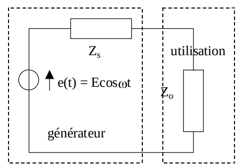


3. En s'appuyant sur la représentation de Fresnel, on établit d'après le théorème d'Al Kaschi (théorème de Pythagore généralisé) :
$I_1^2 = I_2^2 + I^2 - 2\, I\, I_2 \cos(\pi - \varphi)$

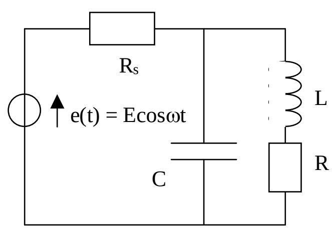
d'où : $\cos\varphi = \dfrac{I_1^2 - I_2^2 - I^2}{2II_2}$

Or : P = UI cosφ avec U = R.I_2 ;
on tire finalement : P = $R\,\dfrac{I_1^2 - I_2^2 - I^2}{2}$

11. Adaptation d'impédance :



a) b) Question de cours (adaptation d'impédance). Ecrire l'intensité dans Z, puis P = RI². P sera minimale pour Z_s = Z* (conjugué).
L'impédance de sortie du générateur est Z_s = R_s.
Il reste à calculer l'impédance du circuit proposé.



Son admittance est : $Y = jC\omega + \dfrac{1}{R + jL\omega}$

dont on déduit : $Z = \dfrac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

L'égalité : Z = Z_s* = R_S conduit en développant puis identifiant parties réelles et imaginaires à deux équations dont on tire finalement :

$C = \dfrac{1}{\omega\sqrt{R.R_S}}\sqrt{1 - \dfrac{R}{R_S}}$; $L = \dfrac{1}{\omega}\sqrt{R.R_S}\sqrt{1 - \dfrac{R}{R_S}}$ qui n'existent que si R < R_S.