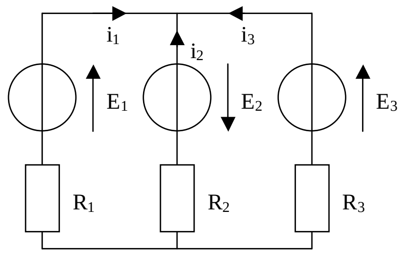
Electrocinétique : régime permanent (Corrigé)

Ex 0 : application des lois de Kirchoff.



Posons d'abord les équations électriques :

loi de nœud : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ (1) (attention à l'orientation des conducteurs).

lois de mailles : $E_1 - R_1 i_1 = -E_2 - R_2 i_2$ (2)

$E_1 - R_1 i_1 = E_3 - R_3 i_3$ (3)

Utilisons (2) pour éliminer i_2 : $i_2 = \dfrac{E_1 + E_2 - R_1 i_1}{-R_2}$

et de même (3) pour éliminer i_3 : $i_2 = \dfrac{E_1 - E_3 - R_1 i_1}{-R_3}$

En injectant ces expressions dans (1), il vient : $\dfrac{E_1 + E_2}{-R_2} + \dfrac{E_1 - E_3}{-R_3} + i_1\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2} + \dfrac{R_1}{R_3}\right) = 0$

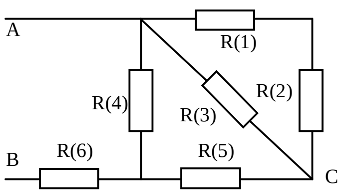
d'où on tire finalement : $i_1 = \dfrac{(R_2 + R_3)E_1 + R_3 E_2 - R_2 E_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$

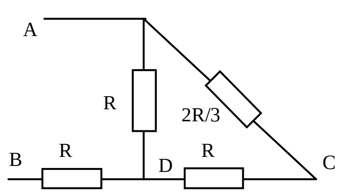
1. Association de résistors. Visualisation d'un réseau.

(a) Procédons par associations successives.

les résistances (1) et (2) sont en série, et équivalent à une résistance de 2R. L'ensemble est en dérivation sur une troisième résistance (3), et a donc une résistance équivalente entre A et C valant

$R_{AC} = \dfrac{R.2R}{R + 2R} = \dfrac{2R}{3}$

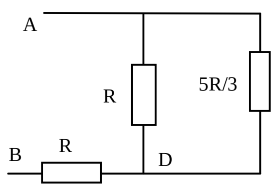




Remarquons que la résistance (4) n'est pas en dérivation sur la résistance (3), ni en série avec les résistances (5) ou (6).

On réitère une démarche analogue (association série puis en dérivation) amenant une résistance vue entre A et D valant $R_{AD} = \dfrac{R.\dfrac{5R}{3}}{R + \dfrac{5R}{3}} = \dfrac{5R}{8}$

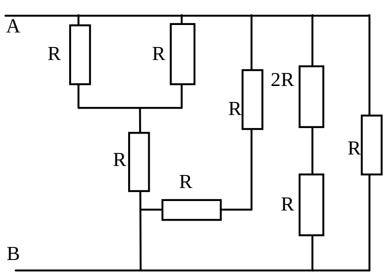
(le point C n'est plus présent dans le schéma).

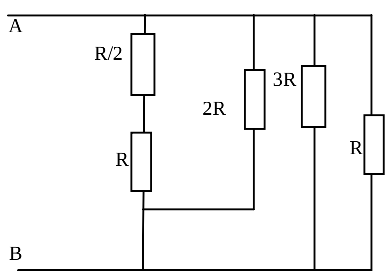


Il vient finalement, entre A et B : $R_{AB} = \dfrac{13R}{8}$

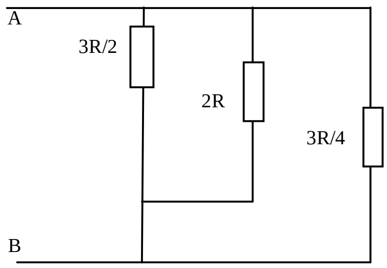
(b) Même méthode.

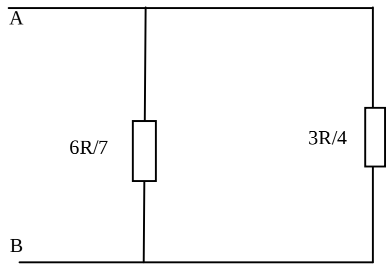
Réalisons d'abord une première série d'associations évidentes, en série ou en dérivation.





Puis dans une seconde étape : Puis ensuite :

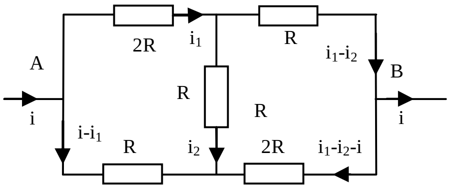




qui mène finalement à

$$R_{éq} = \frac{\frac{6R}{7}.\frac{3R}{4}}{\frac{6R}{7}+\frac{3R}{4}} = \frac{2R}{5}$$

(c)

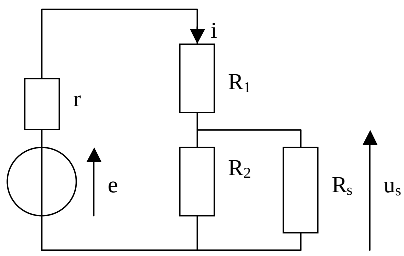


La situation (c) demande la mise en équation du circuit pour accéder à $R_{éq} = u / i$, après élimination de i_1 et i_2.

En utilisant la loi des nœuds, on explicite (sur le schéma) les intensités dans les différentes branches.
Notons u la tension entre A et B.
$u = R.(3i_1 - i_2)$
Ecrivons les lois de mailles.
Sur la première maille : $2Ri_1 + Ri_2 - R(i - i_1) = 0$ (résistance en convention générateur pour le dernier terme)
Sur la seconde maille : $Ri_2 - 2R(i_1 - i_2 - i) - R(i_1 - i_2) = 0$ (résistances en convention générateur pour le second et le troisième terme)
Après simplification, ces deux lois mènent à deux équations indépendantes sur i_1 et i_2 :
$3i_1 + i_2 = i$ et $2i = 3i_1 - 4i_2$
Système dont on tire : $i_2 = -i/5$ et $i_1 = 6i/15$.
D'où : $u = (7/5).Ri$ et donc une résistance équivalente vue de A et B valant : $R_{éq} = 7R/5$.

Ex 2 : Diviseur potentiométrique.

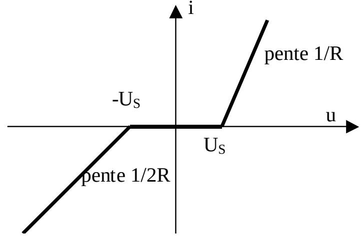
1°) Associer en dérivation R_2 et R_S , globalement traversées par l'intensité i cherchée.
La loi de maille donne alors : $e = r.i + R_1 i + (R_S.R_2/(R_S+R_2)).i$ d'où : $i = \frac{(R_s + R_2)e}{R' R_s + R' R_2 + R_s R_2}$
en notant $R' = r + R_1$.



2°) On a un diviseur de courant : $i_S = R_2.i /(R_2 + R_S)$.
d'où : $i_S = \frac{R_2 e}{R' R_s + R' R_2 + R_s R_2}$
3°) $P_g = e.i - r.i^2$, que l'on peut expliciter si on le souhaite.
$P_S = R_S.i_S^2$, que l'on peut expliciter si on le souhaite.
AN : i = 6,9 mA ; i_S = 3,4 mA ; P_g = 35 mW ; P_S = 12 mW ; $\eta = P_S / P_g = 0,34$.

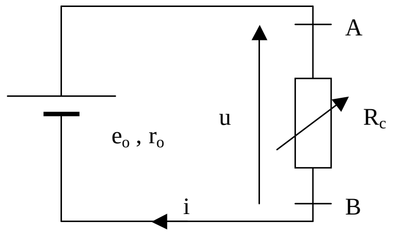
Ex 3 : caractéristique d'une association de dipôles.

Additionner graphiquement les tensions pour une intensité donnée pour l'association diode et résistor en série ; puis additionner graphiquement intensités les pour une tension donnée pour l'association des deux branches en dérivation.
On obtient finalement :



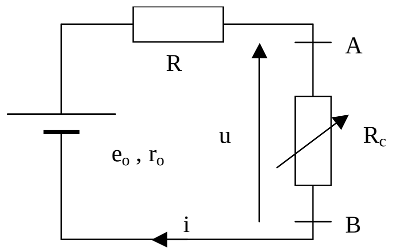
L'intérêt de se montage est de se comporter pratiquement comme un résistor qui offrirait une résistance différente selon que l'intensité du courant qui la traverse est positive ou négative (on pourra négliger le segment horizontal situé pour les valeurs $-U_S < u < U_S$ si ce dipôle est utilisé dans un montage mettant en jeu des tensions suffisamment importantes).

Ex 4 : Réalisation d'un générateur de tension ou de courant.



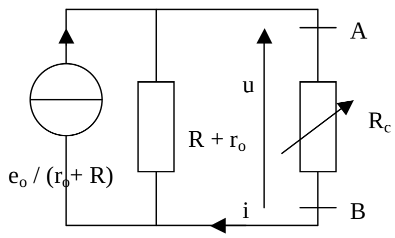
1°) $u = R_c i$ et $u = e_o - r_o.i$
on tire de ce système : $i = e_o / (R_c + r)$ et $u = R_c.e_o / (R_c + r)$

A.N. : Pour $R_c = 220\ \Omega$; $i = 6{,}8$ mA et $u = 1{,}5\ V \approx e_o$
Pour $R_c = 5{,}0\ \Omega$; $i = 0{,}25$ A et $u = 1{,}25$ V
En modélisant la pile comme un générateur idéal de tension, on aurait : $u = e_o = 1{,}5$ V et $i = 0{,}30$ A.



2°) circuit équivalent :
On reconnaît un pont diviseur de courant.

$$i = \frac{(R + r_o)\left(\frac{e_o}{R + r_o}\right)}{R + r_o + R_c}$$



Si $R \gg R_c$, alors (r_o étant négligeable): $i \approx e_o/R$.

Ex 5 : Générateurs de tension ou de courant. Point de fonctionnement.

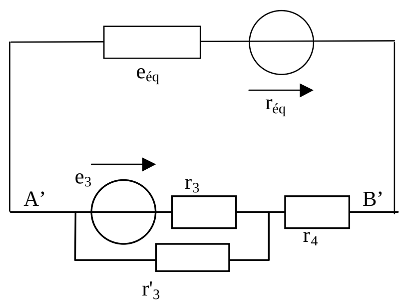
A) question d'application directe du cours.
a) $e_{éq} = e_1 + e_2$; $r_{éq} = r_1 + r_2$
b) passer les dipôles (e_1, r_1) et (e_2, r_2) e représentation de Norton. Les caractéristiques équivalentes de ces dipôles vont ensuite s'additionner : $\eta_{éq} = (e_1/r_1) + (e_2/r_2)$ et $g_{éq} = (1/r_1) + (1/r_2)$ on déduit ensuite $e_{éq} = g_{éq}.\eta_{éq}$.
b) Passer le générateur (e_3, r_3) en représentation de Norton, son association en dérivation avec r'_3 amène un générateur de Norton pour l'ensemble de $\eta_{éq} = e_3/r_3$ et de $g_{éq} = 1/r_3 + 1/r'_3$.

On repasse ensuite ce dipôle en représentation de Thévenin, que l'on associe en série avec r_4.
Il vient donc finalement pour le dipôle A'B' :

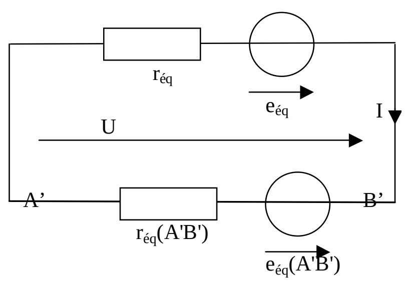
$$e_{éq(A'B')} = r'_3.e_3/(r_3 + r'_3) \qquad \text{et} \qquad r_{éq(A'B')} = r_4 + r'_3.r_3/(r_3 + r'_3).$$

La détermination de la représentation de Norton de ce dipôle A'B' ne pose pas de difficulté :
$\eta_{éq(A'B')} = e_{éq(A'B')} / r_{éq(A'B')} = r'_3.e_3/(r_3.r'_3+r_3.r_4+r'_3.r_4)$ et $r_{éq(A'B')} = r_4 + r'_3.r_3/(r_3 + r'_3)$.

C) En utilisant le modèle de Thévenin obtenu en A a) puis en A) b), on calcule I et U dans le montage :



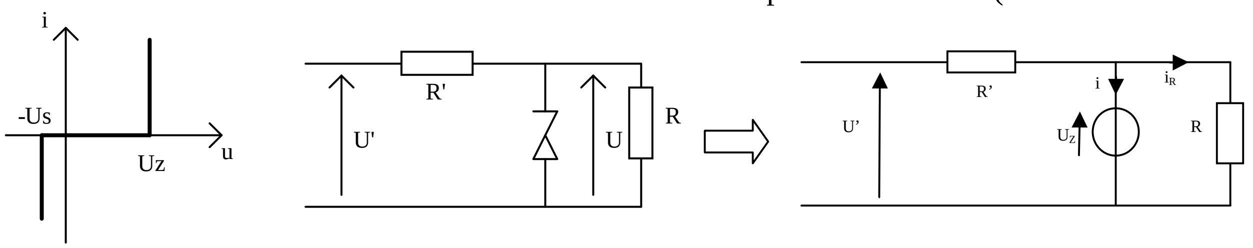
Ce calcul est tout simple si l'on remplace le dipôle A'B' lui aussi par sa propre représentation de Thévenin :



A partir de la loi de maille on tire :
$I = (e_{éq} - e_{éq(A'B')})/(r_{éq}+r_{éq(A'B')})$
et :
$U = e_{éq} - r_{éq}.I = (r_{éq(A'B')}.e_{éq} + r_{éq}.e_{éq(A'B')})/(r_{éq}+r_{éq(A'B')})$

Ex 6 : stabilisation de tension par une diode Zener

a) Remplaçons dans le schéma la diode Zener par sa représentation sur la branche souhaitée : elle est alors équivalente à une source de tension de fém U_Z. Ceci ne peut être réalisé que si l'intensité i traversant cette diode est positive. (voir schéma)



Par la loi des nœuds, l'intensité traversant la résistance R' est $i + i_R$ et d'après la loi d'Ohm :
$i + i_R = (U' - U_Z)/R'$;
avec une tension U_Z impose aux bornes de la diode Zener comme aux bornes de la résistance R. Donc $i_R = U_Z / R$.

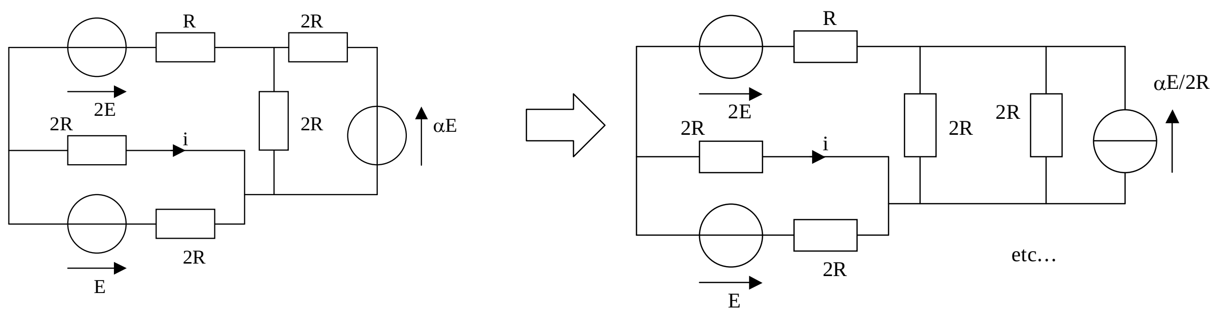
D'où $i = \dfrac{U' - U_Z}{R'} + \dfrac{U_Z}{R}$

La condition i > 0 explicitée sur U' amène finalement : $R' < R\left(\dfrac{U'}{U_Z} - 1\right)$

Physiquement, R' étant nécessairement positive, cela implique d'avoir $U' > U_Z$ pour que la condition puisse être réalisable.
La situation la plus défavorable concerne le cas où U' = 10 V. Il faut alors R' < 61 Ω.

b) La puissance maximale débitée dans la diode sera au contraire atteinte pour une valeur maximale de la tension U' (15 V).
D'après a) l'intensité vaudra alors, en prenant R' = 61 Ω : $i_{max} = 0{,}082$ A, ce qui amène une puissance reçue $P = U_Z.i = 0{,}58$ W <0,70 W. La puissance reste inférieure à la valeur maximale acceptable.

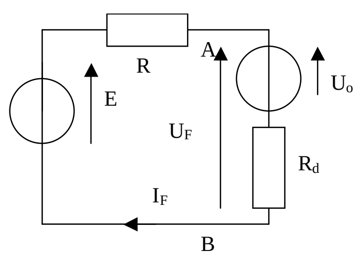
Ex 7 : utilisation des représentations de Thévenin et Norton.
Exercice qui sera résolu associant progressivement les différents dipôles constituant le circuit. On procèdera en passant les dipôles en représentation de Norton lorsque l'on veut les associer en dérivation avec un autre dipôle, et en passant les dipôles en représentation de Thévenin lorsque l'on veut les associer en série avec un autre dipôle.



Ex 8 : Diode à vide et en charge.
A) a) Remplacer la diode par sa représentation de Thévenin lorsqu'elle est sur sa branche passante (branche directe).
On calcule ensuite à partir de la loi de maille :

$I_F = (E - U_0)/(R + R_d)$ et $U_F = \dfrac{R_d E + R U_0}{R + R_d}$,

b) différentier U_F : $\Delta U = R_d.\Delta E/(R + R_d)$
d'où : $f_o = \Delta E/\Delta U = 1 + R/R_d$.
Le taux d'ondulation est $\tau = \Delta U/U_F$.

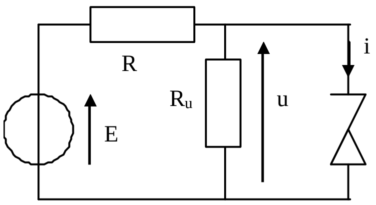


B) Calculer le modèle de Thévenin de caractéristiques E_{th} et R_{th} équivalent à l'association du générateur (E, R) en dérivation avec R_c. $E_{th} = R_c.E/(R + R_c)$ et $R_{th} = R_c.R/(R + R_c)$. On se ramène alors au cas précédent.

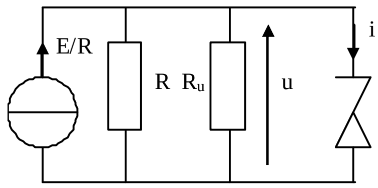
C) La diode sera passante à condition que $E_{th} > U_o$.
L'intensité I_F doit être inférieure à I_{max}. En exploitant ces inégalités :

$$\frac{RU_0}{E - U_0} < R_c < \frac{R(U_0 + R_d I_{max})}{E - U_0 - (R + R_d)I_{max}}$$

Ex 9 : Stabilisation par diode Zener.



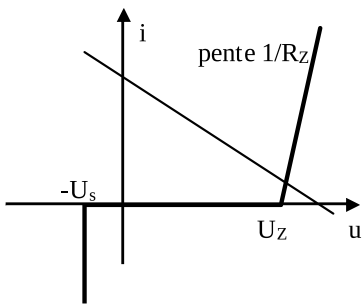
Le montage proposé peut être redessiné comme ci-contre.
Le dipôle (E, R) étant associé en dérivation avec le dipôle R_u, on a profit à le représenter selon Norton.



L'association en dérivation de R_u et R qui apparaît alors peut être remplacée par le résistor équivalent, de conductance
$G_{éq} = (1/R) + (1/R_u)$

La relation courant-tension pour le dipôle générateur ainsi constitué s'écrit : $i = (E/R) - G_{éq}u$ (1)

soit encore : u = $u = \dfrac{R_u E}{R + R_u} - \dfrac{R_u R}{R + R_u} i$ = $E_{éq} - R_{éq}i$



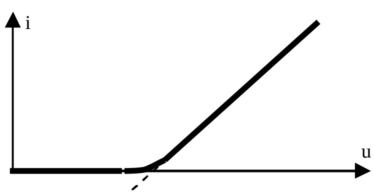
Le point de fonctionnement obtenu en branchant la diode Zener correspond au graphe ci-contre :
où la droite de charge, dont l'équation est $i = (E/R) - G_{éq}u$
viendra couper la caractéristique de la diode Zener sur la branche voulue à condition d'avoir $E_{éq} > U_Z$
ce qui se traduit par $E > (R + R_u).(U_Z/R_u)$.

Dans ces conditions, la diode fonctionnant sur la branche Zener, elle aura pour équation caractéristique : $i = (u - U_Z)/R_Z$ (2)

Il reste à expliciter i et u d'un système formé des équations (1) et (2).

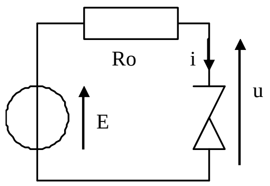
On tire après calculs et simplifications : $i = \dfrac{R_u E - U_z(R + R_u)}{R_u R_z + RR_z + RR_u}$; $u = \dfrac{\dfrac{E}{R} + \dfrac{U_z}{R_z}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_u} + \dfrac{1}{R_z}}$

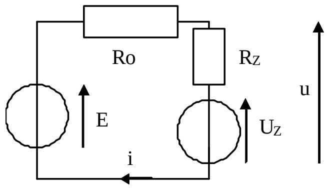
Ex 10 :
1. Le tracé de la caractéristique a pour allure :



2. On distingue deux domaines de fonctionnement : pour u < 6,0 V , i = 0 et pour u > 6,0 V, on aura une variation pratiquement linéaire de i avec u.
Par une régression linéaire, on obtient l'équation de la courbe i = f(u) au-delà de u = 6,0 V : $i = \alpha.u + \beta$
$\alpha = 0{,}2499$ et $\beta = -1{,}498$ avec un coefficient de corrélation : r = 0,99966…

On en déduit $u = f^{-1}(i) = (1/\alpha).i - \beta/\alpha$ que l'on peut identifier à un modèle de Thévenin de caractéristiques (U_Z, R_Z) imposant : $u = U_Z + R_Z.i$ pour le dipôle dans ce domaine de fonctionnement. Il vient : $R_Z = 1/\alpha = 4{,}0\ \Omega$ et $U_Z = -\beta/\alpha = 6{,}0$ V.
Remarque : on pouvait aussi faire la régression directement sur la fonction $u = f^{-1}(i)$ qui mène immédiatement aux valeurs de R_Z et U_Z.

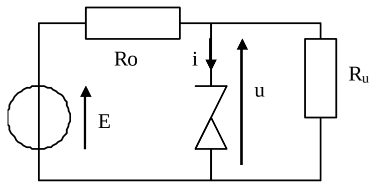




3. On remplace le dipôle par sa représentation de Thévenin dans le domaine de fonctionnement.

La loi de maille amène : $E = R_o.i + R_Z.i + U_Z$
dont on tire : $i = \dfrac{E - U_Z}{R_o + R_Z}$ La résistance interne du générateur est négligée vue sa faible valeur devant celle de R_o.

4. Montage diviseur de tension. $u = \dfrac{R_u.E}{R_u + R_o}$



5. Reprendre le schéma en remplaçant le dipôle (diode Zener) par sa représentation de Thévenin dans le domaine de fonctionnement.
On peut ensuite transformer le dipôle (E, R_o) en sa représentation de Norton, faire de même sur le dipôle représentant la diode, puis procéder à l'addition des cém respectives E/R_o et U_Z/R_Z. La résistance équivalente à l'addition des deux dipôles sera $R_o.R_Z / (R_o+R_Z)$.
On repasse l'ensemble en un modèle de Thévenin (u_{th}, R_{th}) alimentant la résistance R_u , avec après calculs et simplifications :
$u_{th} = \dfrac{R_Z E + R_o U_Z}{R_Z + R_o}$ et $R_{th} = R_o.R_Z / (R_o+R_Z)$
On tire alors, par la formule du diviseur de tension :
$u = \dfrac{R_u.u_{th}}{R_u + R_{th}}$ soit après calculs $u = \dfrac{R_Z E + R_o U_Z}{(R_o.R_Z / R_u) + R_o + R_Z}$

6. On différentie les expressions de u avec E comme seule variable (la fém du générateur varie de $\Delta E = 0{,}5$ V).
Pour le montage du 4) : $\Delta u = \dfrac{R_u.\Delta E}{R_u + R_o}$; pour le montage du 5) : $\Delta u = \dfrac{R_Z \Delta E}{(R_o.R_Z / R_u) + R_o + R_Z}$
AN : Δu (4) $\approx 0{,}5$ V et Δu (5) $\approx 0{,}05$ V. La diode régule la tension.

Ex 11 : Association de générateurs, optimisation.
0) p branches avec q dipôles générateurs par branche : $n = p.q$
1) Additionner les caractéristiques sur chaque branche : on a alors p dipôles en dérivation, de fém q.e et de résistance q.r. Passer chacun de ces dipôles en représentation de Norton : cém e/r et résistance q.r, donc conductance $g = 1/q.r$.
Sommer alors les caractéristiques de ces dipôles, associé en dérivation : on arrive à un dipôle de Norton de cém p.e/r et de conductance p/q.r. D'où finalement $E_{éq} = q.e$ et $R_{éq} = q.r/p$.

2) a) Avec ce modèle on trouve facilement : $I = E_{éq}/(R + R_{éq}) = p.q.e/(q.r + p.R)$ soit avec $q = p/n$, $I(p) = ne/(n.r/p + p.R)$.
b) On trouve l'extrémum par $dI(p)/dp = 0$ qui donne : $p = \sqrt{\dfrac{nr}{R}}$. $q = \sqrt{\dfrac{nR}{r}}$; c) $R_{eq} = R$;
3) $P_{max} = \dfrac{ne^2}{4r}$; $\eta = 50$ %.