ELECTROCINETIQUE : REGIME TRANSITOIRE

Un peu de méthode !

La procédure usuelle de résolution d'un exercice sur le régime transitoire peut se décomposer en trois phases :

1- Mise en équation du circuit, jusqu'à la mise sous forme canonique de la (des) équation(s) différentielle(s) ;
2- Résolution mathématique de l' (des) équations différentielle(s) ;
3- Détermination des constantes d'intégration, à partir des conditions de continuités portant sur les grandeurs du circuit, et des valeurs initiales de ces grandeurs.

La prise en compte de ces conditions initiales, associée aux considérations concernant les comportements des composants en régim permanent (atteint au bout d'un temps « infini ») permet de prévoir sans calcul différentiel l'allure des solutions, ou de valider a postériori les résultats obtenus par ce calcul.

La mise en équation, évidente dans le cas de circuits à une maille, peut demander parfois la combinaison entre plusieurs équations différentielles. Il est parfois utile de dériver par rapport au temps une équation différentielle (ainsi, les termes de charges deviennent des intensités).

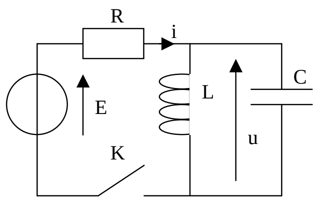
La mise sous forme canonique sera l'occasion de souligner le sens physique des grandeurs qui apparaîtront (en particulier, les constantes de temps du circuit, les grandeurs caractéristiques de l'amortissement...). Elle permet une vérification imédiate de l'homogénéité dimensionnelle des expressions.

La résolution mathématique des équations différentielles linéaires à coefficients constants est algorithmique. Elle a été apprise avec le professeur de mathématiques, et ne doit pas poser de difficultés.

Dans le cas le plus général (équations différentielles avec second membre), on aura : SEC = SGESSM + SPEC

La dernière phase, déterminant les constantes d'intégration à partir des conditions initiales portera sur la solution de l'équation complète SEC (attention aux confusions avec SGESSM !).

Rappelons les conditions de continuité : l'intensité i(t) traversant une bobine est une fonction continue du temps t ; la tension u(t) aux bornes d'un condensateur (ou la charge q(t) qu'il porte) est une fonction continue du temps t. Les relations u = L.(di / dt) et i = C.(du / dt) permettent de tirer des conditions initiales sur les valeurs des dérivées des fonctions i(t) ou u(t).



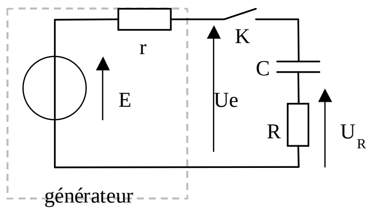
Exemple :

Supposons qu'à $t = 0_-$: $i_L = 0$ et $u_C = 0$. On ferme K à t = 0.

En écrivant la loi de maille sur (E, R, C) à $t = 0_+$, on tire : $i(0) = i_C(0) = E / R$, donc : (du / dt)(0) = E / RC.

Par ailleurs : $L(di_L / dt)(0) = u(0) = 0$ donne accès à : $(di_L / dt)(0)$.

1. Réponse d'un circuit R-C série à un échelon de tension :



A) Un dipôle R-C série est placé en série avec une source de tension de f.e.m. E constante et de résistance interne r. Le condensateur est inialement déchargé. A t = 0, on ferme l'interrupteur K.

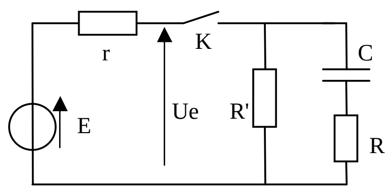
a) Quel est le dipôle de Thévenin vu des bornes du condensateur C ?

b) Déterminer i (t) et tracer son graphe.

c) Exprimer les tensions $u_e(t)$, $u_R(t)$ et représenter leur graphe.

R : en écrivant la loi des mailles et en dérivant / t : $(r+R)\dfrac{di}{dt}+\dfrac{i}{C}$ *car i = dq/dt*

d'où i(t) = $\dfrac{E}{R+r}\exp\left[\dfrac{-t}{(r+R)C}\right]$



B) On branche une résistance R' en dérivation sur un dipole R-C. Le condensateur étant initialement non chargé, on ferme K à t = 0.

a) Montrer que l'on peut se ramener à un circuit à une maille.

b) Calculer u_e (t)

R : Utiliser les rep. de Thévenin et Norton

2. Réponse d'un circuit inductif à un échelon de courant :

Un circuit inductif, constitué d'une résistance R' en parallèle avec une inductance L placée en série avec une résistance R est soumis à un échelon de courant délivré par un générateur de courant idéal : I (t) = 0 pour $t \le 0$, et I (t) = Io = constante pour $t > 0$.

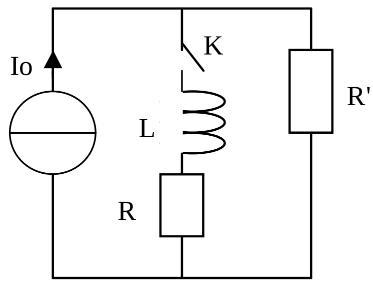
a) Déterminer l'intensité instantanée i (t) du courant traversant la bobine.

a-1) à partir des lois de Kirchoff

a-2) en utilisant les modèles de Thévenin ou Norton.

b) En déduire les expressions de i' (t), le courant traversant R', et u (t), la tension aux bornes de la dérivation.

c) Tracer i (t) et u (t).



R : équation du circuit : $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R+R'}{L} i = \dfrac{R'}{L} I_o$

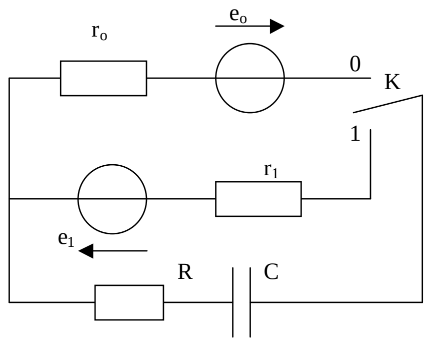
3. Régime transitoire à deux phases d'un circuit R-C :

$e_1 = 10$ V ; $r_1 = 20\ \Omega$; $R = 80\ \Omega$; $C = 11\ \mu$F

$e_o = 4{,}5$ V ; $r_o = 10\ \Omega$

On considère le circuit suivant :

On ferme l'interrupteur K en position "0" à l'instant t = 0, C étant initialement déchargé. Puis, à l'instant t_1 où la charge du condensateur atteind la moitié de celle atteinte au bout d'un temps infini, on commute K en position "1".



1) Calculer littéralement puis numériquement t_1.

On posera $\tau_o = (r_o + R)C$.

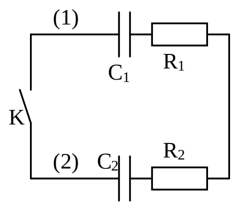
2) Ecrire la loi q (t) pour $t \le t_1$ et $t > t_1$. On posera $\tau_1 = (r_1 + R)C$

3) Représenter q(t) et i(t). Calculer l'instant $t_2 \neq 0$ où la charge q s'annule.

R : $t_1 = \tau_o \, Ln2$. $q(t) = Ce_o(1-\exp(-t/\tau o))$; $q(t) = (Ce_1 + Ce_o/2) \exp(-(t-t_1)/\tau_1) - Ce_1$. $i = dq/dt$.

4. Régime transitoire pour deux condensateurs en opposition :

On suppose qu'à l'instant initial t = 0 où l'on ferme l'interrupteur K, la charge q_1 du condensateur de la branche 1 vaut q_o et que celle de l'autre condensateur est nulle : $q_2 = 0$.



a) Déterminer $q_1(t)$ et $q_2(t)$ et i(t). Commenter le comportement du circuit pour t tendant vers l'infini.

b) Déduire l'énergie W dissipée par effet Joule durant le processus, d'abord par un calcul direct, puis à partir d'un bilan énergétique.

R : a) $i = \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{dq_2}{dt}$ *d'où* $q_1 + q_2 = cste = q_o$*. puis écrire la loi de maille et en tirer une équation en* $q_1(t)$*. b)* $W = \displaystyle\int_0^\infty Ri(t)^2 dt = \frac{1}{2}\frac{q_o{}^2}{C_1} - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_\infty{}^2$ *où* U_∞ *est la tension finale sur* q_1 *et* q_2*.*

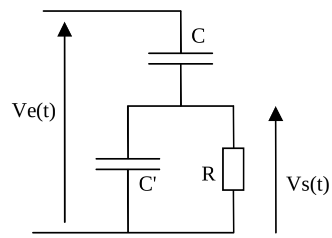
5. Réponse à une tension en dent de scie :

On considère le circuit suivant :

A l'instant initial, les condensateurs C et C' sont déchargés.

On applique aux bornes d'entrée du circuit une tension variable Ve(t).

On appelle Vs(t) la tension de sortie, aux bornes de R ou C'.



1) Etablir l'équation différentielle reliant Vs(t), sa dérivée par rapport au temps et la dérivée par rapport au temps de la tension d'entrée Ve(t).

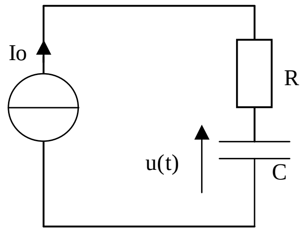
2) La tension d'entrée est une impulsion de durée T décrite par :

- Ve(t) = 0 pour : $t \le 0$ et $t > T$; - Ve(t) = k.t pour : $0 < t \le T$. (où k est une constante).

Exprimer Vs(t) pour tout temps t et représenter les courbes Ve(t) et Vs(t) pour $0 < t < 2T$.

On supposera T >> R.(C + C') = τ.

R :Par la loi de nœud : $\frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{R(C+C')} V_s = \frac{C}{C+C'} \frac{dV_e}{dt}$; *$V_s(t) = kRC(1-\exp(-t/\tau))$ pour $0 < t < T$ et $V_s(t)=kRC.\exp(-(t-T)/\tau)$ pour $t > T$.*



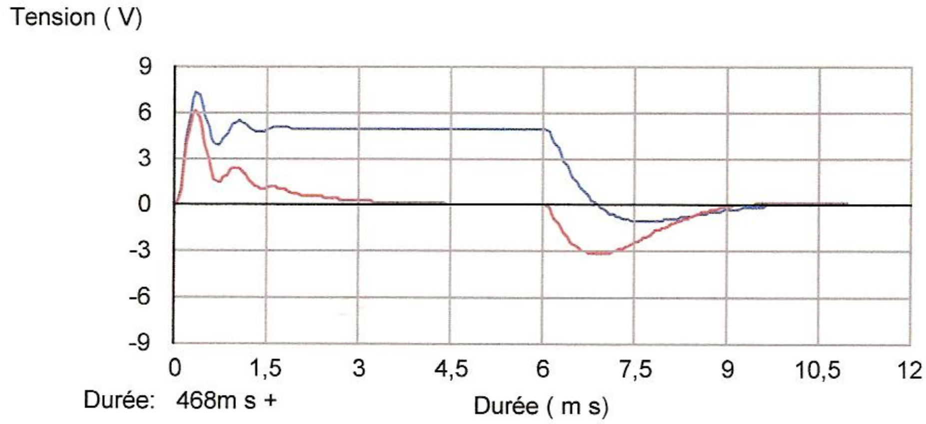
6. Réponse d'un circuit RC à un générateur de courant :

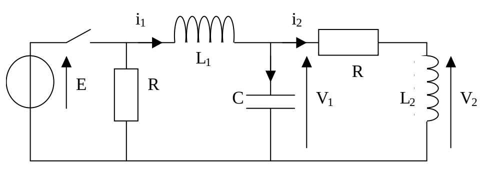
1. On envisage le modèle suivant, où un générateur de courant de cém I_o alimente, à partir de t = 0, l'ensemble résistor et condensateur.
Calculer l' expression de la tension u(t) aux bornes du condensateur.
Discuter de la validité de ce modèle.
2. On prend en compte la conductance du générateur de courant selon le modèle de Norton en considérant un résistor de résistance R_N placé en dérivation sur la source de courant. On suppose R_N grand devant R. Expliciter maintenant q(t) en fonction de I_o, R, C et R_N.
A quelle condition sur t l'expression obtenue rejoint-elle le modèle précédent ?

R : 1. $u(t) = I_o.t/C$, $u(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$. 2. $u(t) = R_N.I_o (1 - \exp(-t/\tau))$ où $\tau = (R_N + R).C$ faire un DL1 pour $t << \tau$.

7. Réponse à un échelon de tension. Etude aux limites.

On considère le circuit ci-dessous. Le graphe représente une simulation de son comportement. Les réponses aux questions suivantes seront justifiées, en s'appuyant éventuellement sur des schémas équivalents du circuit aux instants considérés.

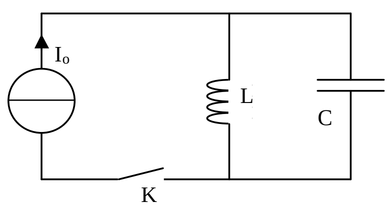




a) L'interrupteur est fermé à l'instant t = 0, sachant qu'auparavant le condensateur était déchargé et les bobines n'étaient parcourues par aucun courant. Prévoir les valeurs initiales des tensions V_1 et V_2 ainsi que de leur dérivées temporelles. Justifier les valeurs "finales" obtenues pour V_1 et V_2 à t > 4,5 ms.

b) Au bout d'une durée t_o suffisante pour que le circuit ait atteint un régime permanent, l'interrupteur est ouvert. Déterminer les valeurs à t_o de V_1 et V_2 ainsi que des intensités i_1 et i_2. En déduire les valeurs des dérivées temporelles de V_1 et V_2 à l'instant t_o.

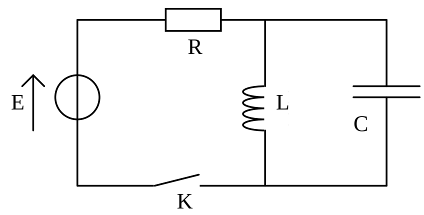
8. Régime transitoire d'un circuit L-C :



On envisage le réseau suivant. L'interrupteur K est fermé à l'instant t = 0, alors que C est déchargé et qu'aucun courant ne traverse L. Etudier l'évolution des courants i_L traversant L, $i_C(t)$ traversant C et exprimer la tension aux bornes de L et C. v(t).
On pourra poser $\omega_O^2 = 1/LC$.

R : $i_C(t) = I \cos\omega_o t$; $i_L(t) = I.(1- \cos\omega_o t)$; $V(t) = L\omega_o I\sin\omega_o t$.

9. Régime transitoire d'un circuit R-L-C :



L'interrupteur K est fermé à l'instant t = 0, C étant déchargé et la bobine n'étant pas parcourure par un courant. La valeur de R est choisie pour avoir : R = $R_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Etudier l'évolution de la tension u aux bornes de L et C.
On pourra poser $\omega_0^2 = 1/LC$.

R : transformer (E, R) selon Norton.écrire la loi de nœud.En dérivant par rapport au temps : $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u(t) = 0$. *Les cond. init. donnent u = 0 et* $\frac{du}{dt} = \frac{E}{RC}$

10. Etincelle de rupture :

On place une bobine d'inductance L dans un circuit comprenant un générateur de f.é.m. constante E et un interrupteur K. La résistance totale du circuit est notée R.
On prendra R = 40 Ω ; E = 40 V et L = 4,0 mH.
Le régime permanent étant établi, on ouvre brusquement l'interrupteur K. L'espace d'air entre les deux cosses de l'interrupteur va se comporter comme l'isolant situé entre les électrodes d'un condensateur, jusqu'au claquage de cet isolant, à une tension de l'ordre de 1000 V, où il devient alors conducteur. On assimile donc la coupure ainsi réalisée à un condensateur de capacité C = 10 pF = 10.10^{-12} F, avant le claquage.
1°) Etudier la d.d.p. u(t) aux bornes de la coupure. Etablir l'équation différentielle satisfaite par u(t) : $\ddot{u} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{u} + \omega_o{}^2 u = \omega_o{}^2 E$ avec $\omega_0^2 = 1/LC$ et $Q = L\omega_0/R = 1/RC\omega_0$.

En déduire la solution : $u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right).(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + E$ avec : $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

Calculer numériquement ω_0, Q et la valeur $\tau = 2Q/\omega_0$. Interpréter. Que peut-on dire de la valeur du facteur $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$?

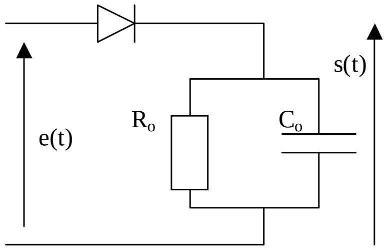
Déterminer A et B à partir des conditions initiales. Justifier les approximations : $\omega = \omega_0$, et B = QE.

2°) Montrer, compte tenu des valeurs numériques données, que u(t) croït rapidement et que le potentiel explosif (de l'ordre de 1000V) est donc rapidement atteint. Calculer approximativement la valeur que prendrait u(t) en l'absence d'étincelle aux bornes de l'interrupteur, et donner l'instant t_{max} où cette valeur serait atteinte.
3°) Montrer qu'au moment de l'éclatement de l'étincelle, la d.d.p. u(t) et l'intensité i(t) sont bien représentées par les expressions : u = bt et $i = I_o(1 - at^2)$. Evaluer numériquement I_o, a et b.
Calculer numériquement l'instant t_i pour lequel la valeur $u(t_i)$ = 1,0 kV est atteinte.

R : 1°) $\tau >> 2\pi/\omega_o$: décroissance exp. Négligeable sur la durée du phénomène.2°) Montée sinusoïdale de u(t), $u_{max} \approx 20$ kV ; $t_{max} = \pi / 2\omega_o$.
3°) Ecrire un DL1 de u(t) en 0. du/dt(0) se déduit à partir de l'éq. diff. du circuit et des conditions de continuité. $u = QE\omega_o.t$; de i = Cdu/dt avec $u = QE\sin\omega_o t$ d'où par un DL2 sur i(t) :
$i(t) = (E/R)(1-\omega_o^2t^2/2)$. $t_i = 1000 / (E/RC) = 10$ ns.

12. Détecteur de crête :

Cet exercice n'est pas à traiter dans l'immédiat. Il pourra être repris en cours d'année, après qu'un TP-cours sur les diodes ait été traité.



On considère le montage suivant.
La diode a une tension de seuil U_S ; on néglige sa résistance dynamique. Le condensateur de capacité C_o est initalement déchargé. On impose à partir de t = 0 une tension sinusoïdale : $e(t) = E_o \cos \omega t$ ($E_o > 0$).
1) Quelle sera la valeur du signal de sortie s(t) si $E_o < U_S$? On suppose pour la suite $E_o > U_S$.
2) Donner les équations définissant l'évolution s(t) selon que la diode est bloquée ou passante. Préciser dans chaque cas la condition de rupture du régime étudié.
3) On considère pour la suite que $U_S = 0$ et que $R_oC_o\omega >> 1$.
3-1) Représenter graphiquement e(t), s(t). On note t_1 l'instant où la diode est bloquée pour la première fois et t_2 l'instant où elle est à nouveau passante pour la première fois.
3-2) Etablir l'expression i(t) de l'intensité du courant traversant la diode.
3-3) Etablir une relation approchée de t_1 en fonction de R_o , C_o et ω.
3-4) Compte tenu de $R_oC_o\omega >> 1$ proposer une expression approchée de t_2 en fonction de t_1 et de la période $T = 2\pi / \omega$.
3-5) Justifier la dénomination de détecteur de crête pour le montage.
3-6) Exprimer le rapport $\eta = \tau / T$ où τ est la durée pendant laquelle la diode conduit sur chaque période T.
3-7) Quelle est l'allure de s(t) ?
R : 2) diode bloquée : $ds/dt + s / \tau = 0$ tant que $e(t) – s(t) < U_S$. diode passante : $s(t) = e(t) – U_S$.
3) pour $t < t_1$ $s(t) = e(t) = E_o\cos\omega t$; pour $t_1 < t < t_2$ $s(t) = e(t_1) \exp(-(t – t_1)/R_oC_o)$.