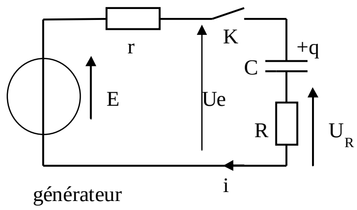
1. Réponse d'un circuit R-C série à un échelon de tension :



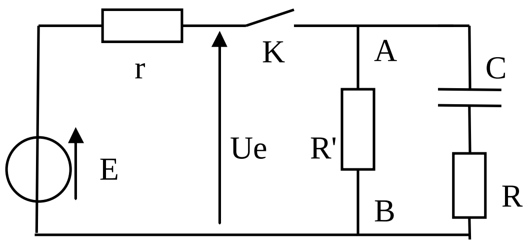
A) a) générateur de tension de fém E et de résistance interne r + R

b) La loi de maille donne : $E = (r+R).i(t) + \frac{1}{C}q(t)$. On a choisi l'orientation du condensateur de façon à ce que i(t) = dq/dt.

en dérivant / t : $(r+R)\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

La solution générale de cette équation sans second membre sera : λ.exp(-t/(r+R)C)
La condition initiale q(t = 0) = 0 fixe i(t = 0) = E/(r+R)

d'où : $i(t) = \frac{E}{R+r}\exp\left[\frac{-t}{(r+R)C}\right]$



c) $u_e(t) = E - r.i(t) = u_C(t) + R.i(t)$; $u_R(t) = R.i(t)$
Pour le tracé :

$u_e(0) = R.E/(R+r)$ et $u_e(\infty) = E$;

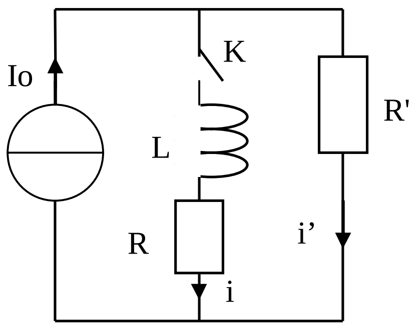
$u_R(0) = R.E/(R+r)$ et $u_R(\infty) = 0$.

B) a) Pour se ramener à un circuit à une maille, on va représenter le dipôle (AB) selon Thévenin (Utiliser d'abord la représentation de Norton sur (E,r)…)
$E_{AB} = R'.E/(r+R')$ et $R_{AB} = r.R'/(r+R')$

b) u_e (t) = u_e(t) = E – r.i(t) soit :

$$u_e(t) = E - \frac{rR'E}{(r+R')R + rR'} exp\left(\frac{-(r+R')t}{(rR + rR' + RR')C}\right)$$

2. Réponse d'un circuit inductif à un échelon de courant :



a) a-1) $I_o = i(t) + i'(t)$; $L(di/dt) + Ri(t) = R'.i'(t)$ mènent à l'équation du circuit : $\frac{di}{dt} + \frac{R+R'}{L}i = \frac{R'}{L}I_o$

La résolution de cette équation amène :

$$i(t) = \frac{R'I_o}{R+R'}\left(1 - \exp\left[\frac{-(R+R')t}{L}\right]\right)$$

a-2) Le dipôle (I_o, R') est un dipôle de Norton. Sa représentation de Thévenin aura pour fém : $R'I_o$ et pour résistance équivalente R'. On aboutit alors à un circuit à une seule maille, pour laquelle l'équation de maille s'écrit :

$L\frac{di}{dt} + (R+R')i = R'I_o$; même solution qu'en a-1).

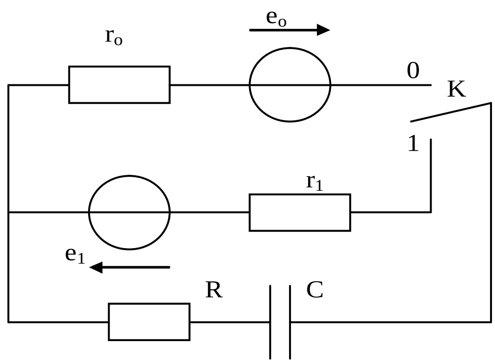
b) $i'(t) = I_o - i(t) = \frac{RI_o}{R+R'} + \frac{R'I_o}{R+R'}\exp\left[\frac{-(R+R')t}{L}\right]$ courant traversant R', et u (t) = R'.i'(t)

c) Pour tracer i(t) et u (t) :
$i(0) = 0$; $i(\infty) = R'I_o/(R+R')$; $u(0) = R'I_o$; $u(\infty) = RI_o/(R+R')$.

3. Régime transitoire à deux phases d'un circuit R-C :

1) Ecrivons la loi de maille quand K est en position (0) :
$e_o = (r_o+R)\, i + q/C$ avec i = dq/dt.
Condition initiale : q(0) = 0

Solution : $q(t) = Ce_o(1 - \exp(-t/\tau_o))$ avec $\tau_o = (r_o+R)C$



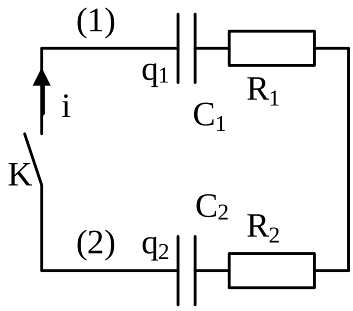
t_1 est tel que : $q(t_1) = Ce_o/2$.
L'équation $Ce_o(1 - \exp(-t_1/\tau_o)) = Ce_o$ donne $t_1 = \tau_o \ln 2$.

2) pour $t > t_1$, la loi de maille (quand K est en position (1)), s'écrit : $- e_1 = (r_1+R)\, i + q/C$ avec toujours $i = dq/dt$.
La solution générale est : $q(t) = -Ce_1 + A.\exp(-t/\tau_1)$ avec $\tau_1 = (r_1 + R)C$

La condition de continuité sur q(t) impose : $q(t_{1-}) = Ce_o/2 = q(t_{1+}) = -Ce_1 + A.\exp(-t_1/\tau_1)$
D'où $A = C(e_o/2 + e_1).\ \exp(+t/\tau_1)$.
On va donc expliciter q(t) sous la forme : $q(t) = -Ce_1 + C(e_o/2 + e_1).\exp(-(t - t_1)/\tau_1)$.
L'exposant en $(t - t_1)$ peut être interpréter comme un changement d'origine des temps : pour $t > t_1$ on aura $(t - t_1) > 0$, et il apparaîtra alors une décroissance exponentielle de la charge à partir de sa valeur $Ce_o/2$ obtenue à $t = t_1$.
3) $t_2 \neq 0$ et t_2 tel que la charge q s'annule. $q(t > t_1) = 0$ donne $t_2 = t_1+ \tau_1 \ln(1+ e_o/2e_1)$

4. Régime transitoire pour deux condensateurs en opposition :

a) $i = \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{dq_2}{dt}$ d'où $q_1 + q_2 = cste = q_o$.



Loi de maille : $q_1/C_1 - R_1 i = q_2/C_2 + R_2 i$

En éliminant q_2 on va tirer une équation en $q_1(t)$:

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{1}{R_1 + R_2}\frac{C_1 + C_2}{C_1.C_2} q_1 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C_2} q_o$$

La résolution, avec la condition initiale $q_1(0) = q_o$ donne :

$$q_1(t) = q_o\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\exp\left[\frac{-t}{\tau}\right] + \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) \quad \text{où } \tau = \frac{(R_1 + R_2)C_1.C_2}{C_1 + C_2}$$

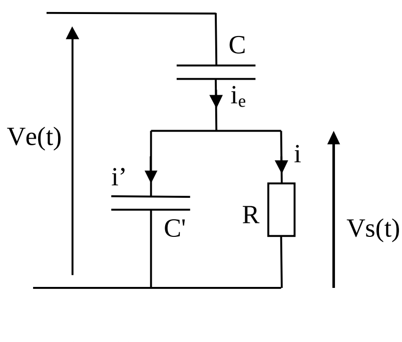
b) W sera la différence entre l'énergie électrique initialement contenue dans le condensateur C_1 et l'énergie électrique résiduelle à l'état final dans les deux condensateurs.

$$W = \int_0^\infty Ri(t)^2 dt = \frac{1}{2}\frac{q_o{}^2}{C_1} - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_\infty{}^2$$ où U_∞ est la tension finale sur q_1 et q_2.

$U_\infty = q_o/(C_1+C_2)$.

5. Réponse à une tension en dent de scie :

La loi de nœud : $i_e = i + i'$ se traduit par $C\dfrac{d(V_e - V_s)}{dt} = \dfrac{V_s}{R} = C'\dfrac{dV_S}{dt}$



Soit après mise en forme :

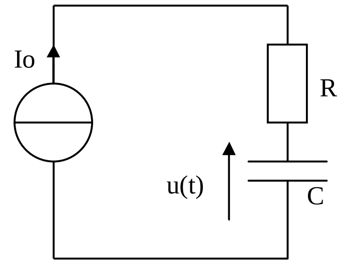
$$\frac{dV_s}{dt} + \frac{1}{R(C + C')}V_s = \frac{C}{C + C'}\frac{dV_e}{dt} \ ;$$

La condition initiale se traduit par $V_S(0) = 0$.

pour $0 < t < T$, $V_e(t) = k.t$ donc $dV_e/dt = k$. La solution est $V_s(t) = kRC(1-\exp(-t/\tau))$
pour $t > T$, $V_e(t) = 0$ donc $dV_e/dt = 0$.
La solution générale est $V_s(t) = A.\exp(-t/\tau)$ et compte tenu de la condition de continuité sur V_S,

$V_S(t = T) = kRC$ (car $T \gg \tau$, le circuit atteint quasiment le régime permanent en fin de première phase) : $V_s(t) = kRC.\exp(-(t-T)/\tau)$

6. Réponse d'un circuit RC à un générateur de courant :



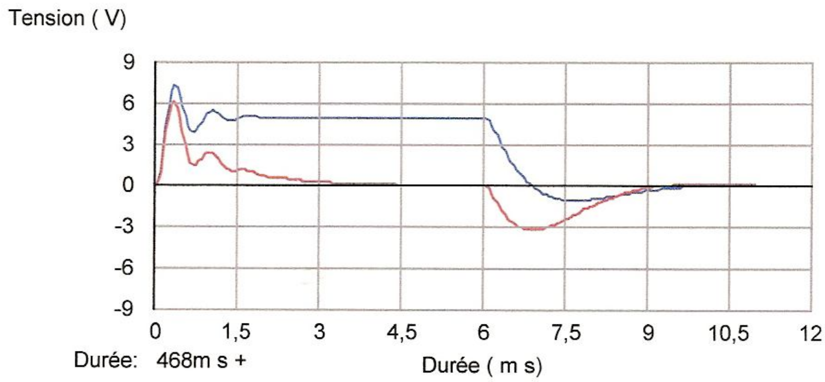
1. En intégrant $I_o = Cdu/dt$ on obtient : $u(t) = I_o.t /C$.
$u(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$ impossible de conserver ce modèle sur une grande durée.

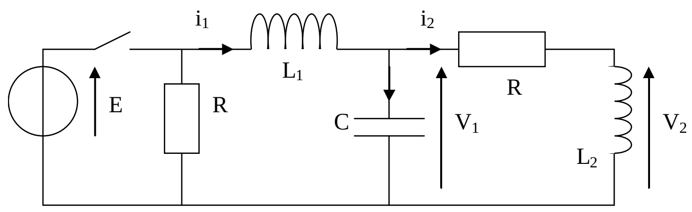
2. Passer le dipôle (I_o, R_N) en représentation de Thévenin :
fém RI_o et résistance R_N . On a alors un circuit à une seule maille qui mène à :
$u(t) = R_N.I_o (1 – \exp(-t/\tau))$ où $\tau = (R_N + R).C$

En faisant un DL1 au voisinage de 0 pour $t \ll \tau$: $u(t) \approx R_NI_o(1 – (1 – t/\tau)) = R_NI_o.t/\tau$ on retrouve l'expression du 1.

7. Réponse à un échelon de tension. Etude aux limites.

On considère le circuit ci-dessous. Le graphe représente une simulation de son comportement.





a) L'interrupteur est fermé à l'instant t = 0, sachant qu'auparavant le condensateur était déchargé et les bobines n'étaient parcourues par aucun courant.

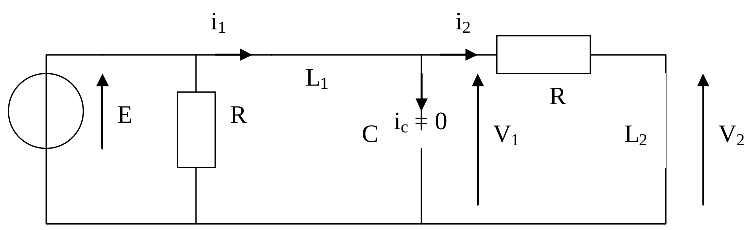
* à t = 0 : $i_1(0+) = 0$ et $i_2(0+) = 0$ car on a continuité de l'intensité traversant une bobine.

$V_1(0+) = 0$ par continuité de la tension sur un condensateur.
$R. i_2(0+) = 0$ donc $V_2(0+) = V_1(0+) - R. i_2(0+) = 0$.

$i_c + i_2 = i_1$ amène $i_c(0+) = C.(dV_{1/}dt)(0+) = 0$

$V_1 = R.i_2 + V_2$ à tout instant. Dérivons cette équation par rapport au temps :
$dV_1/dt = R.di_2/dt + dV_2/dt$ à tout instant.
Or $V_2 = L_2.di_2/dt$ amène : $(di_{2/}dt)(0+) = 0$
par ailleurs, on a montré : $(dV_{1/}dt)(0+) = 0$ donc : $(dV_{2/}dt)(0+) = 0$

* à t > 4,5 ms, on trouve le comportement à $t \to \infty$ (fin du régime transitoire) : le circuit équivalent sera :

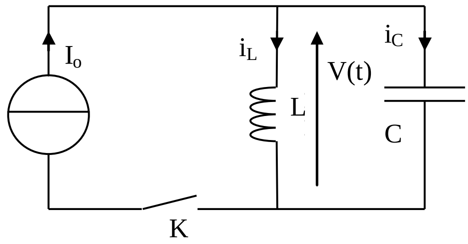


donc $V_2 \to 0$ et $V_1 \to E$.

b) Toujours à partir des conditions de continuité : $i_1(t_o) = i_2(t_o) = E/R$. $V_1(t_o) = E$ et donc $V_2(t_o) = 0$.
Comme $i_1(t_o) = i_2(t_o)$, $i_c(t_o) = 0 = C(dV_1/dt)(t_o)$.

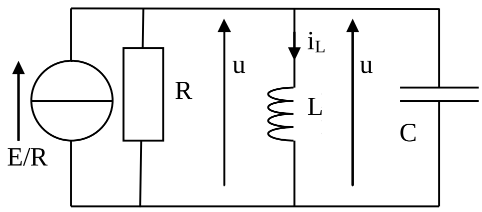
$V_2 = L_2.di_2/dt$ amène : $(di_2/dt)(t_o) = 0$
Or $V_1 = R.i_2 + V_2$ à tout instant. En Dérivant cette équation par rapport au temps :
$dV_1/dt = R.di_2/dt + dV_2/dt$ à tout instant.
Comme $(dV_1/dt)(t_o) = 0$ et $(di_2/dt)(t_o) = 0$, il vient $(dV_2/dt)(t_o) = 0$.

8. Régime transitoire d'un circuit L-C :



On posera $\omega_O^2 = 1/LC$.
$I_o = i_L + i_C$; $V(t) = Ldi_L/dt$ avec $i_C = CdV/dt$
donc : $i_C = LCd^2i_L/dt^2$.
D'où l'équation sur i_L : $I_o = i_L + LCd^2i_L/dt^2$
Solution particulière : $i_L = I_o$; solution générale :
$i_L = A.\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t$
conditions initiales : $i_L(0) = 0$ et $V(0) = Ldi_Ldt(0) = 0$, qui amènent : $i_L(t) = I_o.(1- \cos\omega_o t)$
on déduit ensuite aisément : $i_C (t) = I_o \cos\omega_o t$ et $V(t) = L\omega_o I_o \sin\omega_o t$.

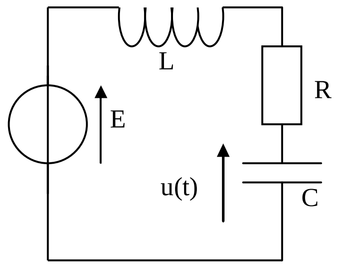
9. Régime transitoire d'un circuit R-L-C :



En transformant (E, R) selon Norton, on écrit la loi de nœud.
$E/R = u/R + i_L + Cdu/dt$ avec $u = Ldi_L/dt$
En dérivant par rapport au temps :
$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u(t) = 0 .$$
Les cond. init. donnent $u(0) = 0$ et $i_L(0) = 0$:

ainsi $i_R(0) = u(0) = 0$ donc $i_C(0) = E/R$
donc $\frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{RC}$
La résolution complète de l'équation a ensuite été traitée en cours, sur l'exemple du circuit RLC série. La nature des solutions va dépendre du signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique : $r^2 + (1/RC)\, r + 1/LC = 0$; $\Delta = (1/RC)^2 - 4/LC$.
Pour $\Delta > 0$, régime apériodique ; pour $\Delta = 0$ régime critique ; pour $\Delta < 0$ régime pseudopériodique.

10. Etincelle de rupture :



1°) La loi de maille donne $E = R.i + Ldi/dt + u$ avec $i = Cdu/dt$
d'où : $\ddot{u} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{u} + \omega_o{}^2 u = \omega_o{}^2 E$ en posant : $\omega_0^2 = 1/LC$
et $Q = L\omega_0/R = 1/RC\omega_0$.
La solution particulière est : $u = E$.

La solution générale est de type pseudo périodique,
car l'équation caractéristique : $r^2 + (\omega_o/Q)\, r + \omega_o^2 = 0$ a un discriminant $\Delta < 0$ vues les valeurs numériques de ω_o et Q, calculées à partir des valeurs données pour R, L et C : $\omega_o = 5{,}0.10^6$ rad/s.

On en déduit la solution complète : $u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right).\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + E$ avec :

$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ Compte tenu des conditions de continuité imposant u(0) = 0 et i = Cdu/dt(0) = E/R, la solution u(t) est totalement déterminée.

La valeur $\tau = 2Q/\omega_0$ est le temps de relaxation (constante de temps dans le facteur exponentiel représentant l'amortissement des oscillations). $\tau = 2{,}0.10^{-4}$ s . τ est très supérieur à la pseudo pédiode des oscillations $T = 2\pi/\omega = 1{,}3.10^{-6}$ s. Sur une durée pas trop important, c'est-à-dire sur quelques pseudo-périodes, l'amortissement sera négligable : la valeur du facteur $\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$ peut être considérée comme constante (égale à 1).

La condition : u(0) = 0 amène A = -E.

En raisonnant sur la fonction approchée $u(t) = \left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + E$

on aura du/dt = $B\omega_o.\cos(\omega_o t)$ et du/dt(0) = E/RC amène alors $B = E/RC\omega_o = QE$.

Finalement : $u(t) \approx (-E.\cos\omega_o t + Q.E\sin\omega_o t) + E$

donc au voisinage de 0 : $u(t) \approx Q.E\sin\omega_o t$ au premier ordre.

2°) D'après ce qui précède, l'évolution de u(t) en début de phénomène correspond à une évolution sinusoïdale. La valeur maximale de la fonction Q.E $\sin\omega_o t$ correspondrait à U = Q.E = 500 x 40V = 20 kV. Cette valeur serait atteinte pour $\omega_o t \approx \pi/2$ soit $t_{max} \approx \pi/(2\omega_o) = 3{,}1.10^{-7}$ s.

Compte tenu de ces valeurs numériques, u(t) croït rapidement. Le potentiel explosif (de l'ordre de 1000V) est donc très rapidement atteint.

3°) Le moment où le potentiel explosif est atteint, c'est-à-dire où $u(t) = U_{exp} \approx 1{,}0$ kV, correspond à un instant $t_i << t_{max}$. L'expression approchée de u(t) : $u(t) \approx Q.E\sin\omega_o t$ est donc alors tout à fait convenable, et peut même être remplacée par sont Développement Limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 : $u(t) \approx Q.E.\omega_o.t$ de forme b.t avec $b = 1{,}0.10^{11}$ $V.s^{-1}$

(Remarque : le terme d'ordre 2 pour la fonction sinus est nul, c'est une fonction impaire).

L'instant t_i répond donc à : $Q.E.\omega_o.t_i = U_{exp}$ d'où : $t_i = U_{exp} / (Q.E.\omega_o) = 1{,}0.10^{-8}$ s = 10 ns.

L'intensité circulant dans le circuit est i(t) = C.du/dt. En utilisant l'expression approchée de u(t) : $u(t) \approx Q.E\sin\omega_o t$ on aura donc : $i(t) \approx Q.C.E.\omega_o.\cos\omega_o t = (E/R)\cos\omega_o t$.

En faisant un D.L.2 en 0 de la fonction cosinus, on obtient alors :

$i(t) \approx (E/R).(1 - (\omega_o t)^2/2)$

que l'on identifie effectivement à : $i(t) = I_o(1 - at^2)$ avec $I_o = E/R = 1{,}0$ A $b = \omega_o^2/2 = 1{,}3.10^{13}$ usi