ELECTROSTATIQUE I

Distributions de charges :

1. Calculer la charge totale contenue dans une sphère de rayon R, dont la répartition volumique de charges répond à l'expression, en coordonnées sphériques : $\rho = k/r$.
Reprendre la question pour un cylindre de rayon R et de hauteur h, portant une répartition de charges d'expression identique à la précédente, mais où r est le rayon en coordonnées cylindriques.

R : $Q_{tot} = 2\pi R^2.k$; $Q_{tot} = 2\pi R.h.k$

2. Le cuivre, de numéro atomique Z = 29, de masse molaire M = 64 g/mol, a pour masse volumique $\mu = 8900$ kg/m^3.

a) Une petite sphère, de rayon a = 1 mm, est chargée en la portant au potentiel V = 3000 V (valeur limite au delà de laquelle l'air entourant la sphère va s'ioniser). La charge apportée vaut alors : $Q = 4\pi\varepsilon_o.aV$ où $1/4\pi\varepsilon_o = 9.10^9$ usi. Comparer le nombre d'électrons et de protons présents dans la sphère. Conclusion ?

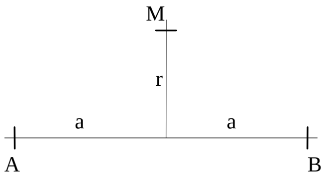
b) Au niveau microscopique, l'apport d'une charge élémentaire entraîne une déformation des nuages électroniques au voisinage de celle-ci. La charge élementaire apparaît ainsi délocalisée, nivelée localement sur un volume d'extension caractéristique de l'ordre de 10 nm. (distance au delà de laquelle cet effet devient négligeable). Montrer que les valeurs numériques proposées dans le problème permettent de définir des échelles microscopique, d, macroscopique, D, et mésoscopique, l, respectant : $d \ll l \ll D$.

c) Lorsque la bille est chargée, les charges excédentaires ont tendance à se répartir au voisinage de la surface de celle-ci. En considérant les valeurs numériques précédentes et en attribuant une charge élémentaire excédentaire à chaque atome de cuivre de la couche concernée, faire une évaluation de l'épaisseur h de la couche chargée. Commenter quand à la validité du modèle d'une répartition surfacique.

d) On a jusqu'ici implicitement supposé que la répartition des charges était uniforme à l'intérieur de l'écorce d'épaisseur h, ce qui n'est pas nécessaire. Considérons par exemple, et pour simplifier, un milieu semi-infini, occupant le demi-espace $z < 0$, chargé au voisinage de la surface ($z = 0$) avec la densité volumique : $\rho = \rho_o.\exp(z/h)$ où h est une distance petite à l'échelle macroscopique.
Pour quelle profondeur z_o, la couche comprise entre $z = 0$ et $z = z_o$ contient-elle 90 % de la charge portée par le milieu ? Définir la densité surfacique de charge σ équivalente. Commenter la situation limite correspondant à $\rho_o \to \infty$ avec $h \to 0$.

R : a) $N_p = Z\mu(4\pi a^3/3)N_A / M$. $N_e = N_p - Q/e$. *b) en considérant le volume d'un atome comme valant* d^3*, il vient* $d = (\mu N_A / M)^{1/3} = 0{,}23$ *nm* $\ll l = 10$ *nm* $\ll a = 1$ *mm.*
c) pour une couche chargée uniformément, d'épaisseur h : $h = Qa/3eN_{Cu}$ *où* N_{Cu} *est le nombre d'atomes de cuivres. A.N. :* $h = 2.10^{-15}$*m. d)* $z_o = 2{,}3\,h$.

Calculs de champs et de potentiels :



3. Deux charges ponctuelles de même valeur q sont placées en deux points A et B distants de 2a. On note r la distance entre le point considéré et l'axe (AB).

a) Au vu des symétries existant pour cette répartition de charges, tracer l'allure des lignes équipotentielles et des lignes de champ électrostatique.

b) Etablir directement l'expression du champ électrique dans le plan médiateur du segment AB.

c) Retrouver l'expression de ce champ à partir du potentiel électrostatique calculé dans le plan médiateur.

R : 3) $E = \dfrac{2}{4\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{qr}{(a^2+r^2)^{3/2}}$; $V = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} \times \dfrac{q}{(a^2+r^2)^{1/2}}$ *donne E(r) = -dV(r)/dr*

4. Champ au centre d'une demi circonférence :

Une charge totale Q est nuiformément répartie sur un demi anneau filiforme, de rayon R et de rayon R. Calculer le champ électrostatique créé au centre O de cette distribution. Le calcul du potentiel en O, V(O) permet-il d'obtenir aisément la valeur de E(O) ?

R : $E(O) = Q / 2\pi^2\varepsilon_o R^2$. $V(O) = Q / 4\pi\varepsilon_o R$. attention à ne pas confondre la fonction potentiel électrostatique (donnant accès à $\vec{E} = -\vec{grad}V$) avec la valeur de cette fonction en O.

5. Une sphère de centre O et de rayon R est globalement neutre. Sous l'influence d'un champ extérieur $\mathbf{E_0}$, cette sphère va subir une polarisation que l'on peut modéliser comme un glissement d'ensemble des charges respectivement positives et négatives présentes dans le matériau constituant cette sphère selon la direction de $\mathbf{E_0}$ et dans des sens opposés. La situation électrostatique apparaît alors équivalente à celle dûe à la superposition de deux sphères de centres O_1 et O_2, distants de a, portant des densités volumiques de charges respectives $+\mu$ et $-\mu$.

a) Déterminer les éléments de symétrie et d'antisymétrie de la distribution.

b) Montrer que pour a faible et μ grande, avec $a.\mu = \sigma_0$, la situation peut être identifiée à celle d'une sphère portant une charge surfacique σ de la forme : $\sigma = \sigma_0.\cos\theta$; où θ représente l'angle (xOM) formé par un diamètre (D) fixé de la sphère, de vecteur unitaire **i**, et la demi-droite [OM), M étant un point quelconque situé à la surface de la sphère. Vérifier que la charge totale correspondant à ce modèle est effectivement nulle.

c) En utilisant le modèle de distribution surfacique établi en (b), montrer que le champ électrostatique en O a pour valeur : $\mathbf{E}(O) = (-\sigma_0/3\varepsilon_0)\,\mathbf{i}$.

Un calcul reposant sur la même démarche conduit, en les points A et A' d'intersection du diamètre (D) avec la sphère à une champ $E(A) = E(A') = \sigma_o / 6\varepsilon_o$. Quelle signification physique donner à cette valeur ? Le modèle employé est-il valide pour ce dernier calcul ?

N.B. : La situation étudiée dans cet exercice sera reprise ultérieurement (voir exercice feuille électrostatique II).

R : a)… b) comparer la charge portée par un élément de surface dS de la distribution surfacique, et un élément de volume de section dS découpé dans la couche chargée résultant de la superposition des deux sphères. c) calculer E par intégration.

6. On considère une charge q répartie uniformément sur une circonférence de rayon R et de centre O dans le plan (Ox ; Oy).
Exprimer le potentiel V d'un point de l'axe (Oz) éloigné de O. En déduire le champ sur cet axe. Tracer les graphes V(z) et E(z).

R : *$V = q/4\pi\varepsilon_0[z^2 + R^2]^{1/2}$; E(z) s'obtient par* $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$. *En $z = R\sqrt{2}/2$, maximum pour E(z) et point d'inflexion pour V(z)*

Applications du théorème de Gauss :

7. Une sphère pleine porte une densité volumique de charge ρ(r) telle que le champ qu'elle crée ait pour expression : $\vec{E} = \frac{\alpha}{r}\vec{e}_r$ où α = cste , à l'intérieur de la sphère.
Déterminer la fonction ρ(r) correspondante. Que vaut le champ à l'extérieur ?

R : $\rho(r) = \alpha\varepsilon_o / r^2$. $E_{ext} = Q_{tot} / 4\pi\varepsilon_o r^2$.

8. On considère dans le vide deux couches sphériques, concentriques en O et de rayon R et R' (R' > R), d'épaisseur négligeable uniformément chargées, de charges totales respectives q et q'. On supposera q > 0 et q' < 0.
a) Déterminer le champ électrique et le potentiel en tout point de l'espace. Etudier et représenter les fonctions E(r) et V(r) dans le cas particulier où q' = -2q et R' = 2R. Vérifier que le champ subit une discontinuité de valeur "σ/ε_0" à la traversée des surfaces chargées.
b) On ajoute la charge -q au centre O des deux couches sphériques. Etudier le champ électrique total.

R : exercice de base sur le th. de Gauss en système sphérique. Calculer E par le th de Gauss en distinguant les cas : r < R ; R < r < R' et r > R'. On tire V de $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$ *qui s'écrit ici : E(r) = -dV/dr. Les constantes d'intégration apparaissant dans V se déduisent par les conditions V(r) tend vers 0 si r tend vers l'infini et les conditions de continuité de V en r = R' et r = R. (voir exemples vus en cours)*

9. On envisage une sphère pleine de centre O, uniformément chargée selon une répartition volumique ρ et comportant une cavité sphérique, vide de charges, de centre O' différent de O. Exprimer le champ électrique régnant à l'extérieur de la sphère, puis dans la partie pleine de la sphère et enfin dans la cavité. Quelle est la particularité du champ régnant dans la cavité ?

R : Visualiser la répartition de charges décrites comme la superposition d'une répartition sphérique ρ de centre O et d'une répartition sphérique -ρ de centre O'. Le champ est constant dans la cavité : $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\overline{OO'}$

10. On considère deux plans infinis portant des répartitions uniformes de charges, de charges surfaciques : $\sigma = \sigma_0$ et $\sigma' = -3\sigma_0$. Ces plans sont d'abord disposés parallèlement à une distance a l'un de l'autre. Déterminer le champ électrique ainsi créé dans les différentes régions de l'espace.
Même question lorsque les deux plans sont disposés perpendiculairement. Vérifier dans chaque cas que le champ subit une discontinuité de valeur "σ/ε_0"à la traversée des surfaces chargées.

R : Le calcul général du champ dû à un plan infini chargé a été traité en cours. Faire des superpositions de champs.

11. Modèle de Yukawa : l'atome d'hydrogène peut être, en première approximation, représenté à l'aide d'une distribution de charges comprenant une charge ponctuelle +e correspondant au noyau de l'atome, entourée d'une distribution volumique de charge négative à symétrie sphérique : $\rho(r) = -(C/r)\exp(-r/a)$ représentant le nuage électronique. a = 0,53.10-10 m est le rayon de Bohr.

a) Calculer la constante C.

b) Calculer la charge électrique interne à la sphère de rayon a.

c) On nomme dq la charge comprise entre les sphères de rayon r et r+dr. Vérifier que dq/dr passe par un maximum en r = a.

d) Quelle est la valeur du champ électrique à la distance a ?

e) Exprimer la fonction potentiel V(r).

R : Exercice un peu calculatoire, utilisant plusieurs fois l'intégration par parties

a) en sommant $\rho(r)$ de 0 à l'infini, on doit trouver la charge d'un électron, soit -e. d'où :

$C = e/4\pi a^2$ (utiliser une intégration par partie).

b) On intègre $\rho(r)$ de 0 à r = a ; soit -0,264 e.

Il faut aussi tenir compte du proton de charge +e. Donc une charge totale +0,736e.

c) ... d) Calcul habituel d'un champ à symétrie sphérique, avec pour charge intérieure q = +0,736e.

e) $E(r) = -dV(r)/dr$ donne après calculs : $V(r) = (e/4\pi\varepsilon_O)(1/r)\exp(-r/a)$.

12. Utilisation locale du théorème de Gauss :

a) Soit un anneau, de centre O, de rayon R, d'axe (Oz), chargé uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$. Exprimer le champ **E** produit en un point M de cote z situé sur l'axe (Oz).

b) On cherche le champ électrostatique en un point P du plan de l'anneau, supposé très proche de O : OP = r << R. Appliquer le théorème de Gauss à un petit cylindre centré sur O, de rayon r et dont les faces sont situées aux cotes z et –z. Faire tendre z vers 0. On limitera le calcul aux termes du premier ordre.

c) On veut exprimer le champ électrostatique produit en un point N voisin de M(z).
La distance MN = r est très inférieure au rayon R de l'anneau et les cotes de M et N sont peu différentes. Appliquer le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r, centré sur l'axe (Oz), dont les faces sont aux cotes z et z + dz.
En déduire une relation entre la composante radiale $E_r(r, z)$ et la dérivée de la composante axiale $E_z(0,z)$. On limitera le calcul aux termes du premier ordre.

12) a) $E(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\frac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$ *; b)* $\vec{E}(r) = \frac{-\lambda r}{4\varepsilon_o R^2}\vec{u}_r$ *;*

c) $\vec{E}(r,z) = E_r(r,z)\vec{u}_r + E_z(0,z)\vec{u}_z$ *avec :* $E_r(r,z) = \frac{-r}{2}\frac{dE_z(0,z)}{dz}$ *et $E_Z(0,z)$ obtenu en (a).*