

# ELECTROSTATIQUE I

## Distributions de charges :

### 1. Calcul de charges totales :

Calculons la charge totale contenue dans une sphère de rayon R, dont la répartition volumique de charges répond à l'expression, en coordonnées sphériques :  $\rho = k/r$ . (pour  $r < R$ ).

$$Q_{tot} = \iiint_{sphère} \frac{k}{r} d\tau \quad \text{où } d\tau \text{ est l'élément de volume sphérique : } d\tau = r^2 dr \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$\text{soit : } Q_{tot} = \int_0^R \frac{k}{r} r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} kR^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 2\pi kR^2$$

Calculons maintenant la charge totale contenue dans un cylindre de rayon R et de hauteur h, portant une répartition de charges d'expression  $\rho = k/r$ , mais où r est le rayon en coordonnées cylindriques.

$$Q_{tot} = \iiint_{cylindre} \frac{k}{r} d\tau \quad \text{où } d\tau \text{ est l'élément de volume cylindrique : } d\tau = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$$

$$\text{soit : } Q_{tot} = \int_0^R \frac{k}{r} r dr \int_0^\pi d\theta \int_0^h dz = kR \cdot 2\pi \cdot h = 2\pi kRh$$

### 2. Répartition des charges sur une sphère métallique :

a) Calculons le nombre d'atomes de cuivre dans la sphère :  $N_{Cu} = (m/M) \cdot N_A$  où m est la masse de la sphère, soit :  $m = (4/3)\pi a^3 \mu$ .

Comme on a Z protons par atome de cuivre ( $Z = 29$ ), on aura donc un nombre de protons :

$$N_p = Z \cdot (4/3)\pi a^3 \mu \cdot (N_A/M) \quad \text{AN : } N_p = 1,02 \cdot 10^{22}.$$

La sphère a été chargée positivement ( $V > 0$ ), par l'arrachement d'électrons. Chaque électron portant une charge  $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  :  $Q = \delta N_e \cdot e$  où  $\delta N_e$  est le nombre d'électrons arrachés.

$$\text{De la relation : } V = Q/(4\pi\epsilon_0 a) \text{ on tire donc : } \delta N_e = 4\pi\epsilon_0 a V/e \quad \text{AN : } \delta N_e = 2,08 \cdot 10^9$$

Le nombre d'électron restant dans la sphère est  $N_e = N_p - \delta N_e$  et est donc pratiquement égal au nombre de protons, c'est-à-dire que la différence est relativement très faible :  $\delta N_e/N_p \approx 2 \cdot 10^{-13}$  (même si cette différence est très conséquente à l'échelle macroscopique).

b) La valeur  $l_{min} = 10 \text{ nm}$  correspond à une limite inférieure pour le choix de l'échelle mésoscopique. La taille des atomes ( $\approx 0,1 \text{ nm}$ ) va correspondre à l'échelle microscopique. Pour en évaluer plus précisément un ordre de grandeur, on peut prendre pour taille des atomes la racine cubique du volume occupé par chacun d'eux.

$$\text{Le volume affecté à chaque atome sera : } V_{at} = (4/3)\pi a^3/N_{Cu} \text{ ou encore : } V_{at} = M/(\mu N_A).$$

$$\text{D'où : } d = \left( \frac{M}{\mu N_A} \right)^{1/3} = 0,23 \text{ nm}.$$

L'échelle macroscopique sera le diamètre de la sphère :  $D = 2 \cdot a$

On peut donc choisir une taille mésoscopique  $l > l_{min}$  telle que :  $d \ll l \ll D$ .

c) Le volume des atomes de cuivre chargés sera :  $V = \delta N_e \cdot V_{at}$  ; en considérant que ce volume se répartit sur une couche sphérique mince d'épaisseur  $h$ , donc de volume :  $V = 4\pi a^2 h$ , on identifie alors :  $h = \delta N_e \cdot V_{at} / (4\pi a^2) = 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ .

La valeur de  $h$  est donc très inférieure à la taille d'un atome ( $10^5$  plus faible !). Cela signifie que seuls certains atomes de la couche superficielle de la sphère seront ionisés, et par conséquent le modèle surfacique convient parfaitement.

d) Dans ce dernier modèle, on considère une distribution en volume selon l'expression :  $\rho = \rho_o \cdot \exp(z/h)$  valide pour  $z < 0$ .

Pour une surface  $dS$ , considérons la charge  $dq_{tot}$  portée par la couche :

$$dq_{tot} = \int_{-\infty}^0 \rho_o \cdot \exp(z/h) dz \cdot dS = \rho_o \cdot h \cdot dS$$

La répartition est équivalente à une charge surfacique de densité  $\sigma$  telle que  $\sigma \cdot dS = \rho_o \cdot h \cdot dS$  donc pour  $\sigma = \rho_o \cdot h$ .

Si on veut  $z_o$  telle que 90% de la charge soit contenue dans l'épaisseur  $|z_o|$  :

$$0,90 \cdot \rho_o h dS = \int_{-z_o}^0 \rho_o \cdot \exp(z/h) dz \cdot dS = \rho_o \cdot h (1 - \exp(-z_o/h)) \cdot dS$$

de solution :  $z_o = -h \cdot \ln 10 = -2,3 \cdot h$

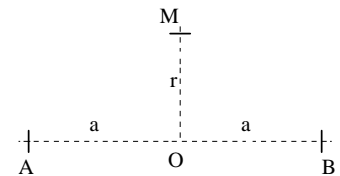
Pour  $\rho_o \rightarrow \infty$  et  $h \rightarrow 0$ , on arrive mathématiquement au modèle surfacique avec  $\sigma = \rho_o \cdot h$ .

## Calculs de champs et de potentiels :

### 3. Champ créé par deux charges identiques :

a) Soit M, point appartenant au plan médiateur de [AB].

(AMB) est plan de symétrie, ainsi que le plan orthogonal à (AB) passant par M. Le champ électrique est donc colinéaire à (OM).



Invariance par rotation autour de (AB), donc le module du champ ne dépendra que de  $r$ , distance entre M et la droite (AB).  $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$ .

Pour tracer l'allure de la carte de champ, utiliser les idées suivantes :

- à proximité de chacune des charges, le champ tend à être radial, les équipotentielles devenant des sphères centrées sur la position de la charge.

- à grande distance des charges, le diagramme électrique (ensemble des lignes de champ et équipotentielles) doit retrouver l'allure de celui correspondant à une charge ponctuelle (correspondant à la charge totale de l'édifice).

$$b) \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o AM^2} \vec{u}_{AM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_o BM^2} \vec{u}_{BM} \quad \text{avec } AM^2 = BM^2 = a^2 + r^2.$$

Comme le champ est colinéaire à (OM), seule la projection de chaque terme sur (Oy) sera utile au calcul.

$$\vec{u}_{AM} \cdot \vec{e}_r = \vec{u}_{BM} \cdot \vec{e}_r = \cos((AM), (OM)) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

$$\text{Finalement : } \vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_o} \times \frac{qr}{(a^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_r ;$$

c) Le potentiel scalaire est additif :  $V(M) = V_A(M) + V_B(M)$  ce qui amène :

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \times \frac{q}{(a^2 + r^2)^{1/2}}$$

La relation :  $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$  avec ici  $V(r)$  donne :  $\vec{E}(M) = -\frac{dV(r)}{dr}\vec{e}_r$  ce qui mène au résultat du b).

#### 4. Champ au centre d'une demi circonférence :

Le plan contenant le fil est plan de symétrie, ainsi que le plan qui lui est orthogonal et qui passe par le centre O du cercle portant le fil. Le champ en O est donc porté par l'intersection de ces deux plans, soit l'axe (Ox).

$$\vec{E}(O) = \int_{\text{fil}} \vec{dE}(O) \quad \text{avec :} \quad \vec{dE} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}$$

Seule la projection de chaque élément de champ sur (Ox) contribuera effectivement au champ total en O.  $dE_x = \vec{dE} \cdot \vec{u}_x = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \alpha$  si  $\alpha$  est l'angle entre l'élément de champ et l'axe (Ox).

$$\text{Avec } dl = R.d\alpha, \text{ il vient : } \vec{E}(O) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha d\alpha \vec{u}_x \quad \text{où } \lambda = Q / \pi R$$

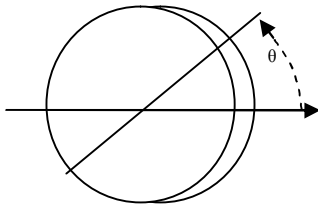
$$\text{Finalement : } E(O) = Q / 2\pi^2\epsilon_0 R^2.$$

$$\text{Le calcul de } V(O) \text{ est simple : } V(O) = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ ce qui donne : } V(O) = Q / 4\pi\epsilon_0 R.$$

Mais il ne fournit que la valeur de  $V(O)$  au point O, et non la fonction  $V(x)$ . Or seule la fonction  $V(x)$  permettrait d'accéder au champ électrique au moyen de la relation :  $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$ .

Le calcul de  $V(x)$  est beaucoup moins simple, on a donc plutôt intérêt à calculer le champ directement.

#### 5. Sphère polarisée :



a) La droite (O<sub>1</sub>O<sub>2</sub>) est un axe de symétrie. Le plan orthogonal au segment [O<sub>1</sub>O<sub>2</sub>] passant par son milieu O est un plan d'antisymétrie.

Ces éléments conduisent à affirmer que le champ électrique en O sera porté par l'axe (Ox) = (O<sub>1</sub>O<sub>2</sub>).

b) Dans la zone où les deux sphères respectivement chargées avec une densité volumique  $+\mu$  et  $-\mu$  se superposent, il y a compensation : la densité est globalement nulle.

Par contre, le décalage entre les centres des deux charges, distants de  $a$ , fait apparaître une couche chargée positive à droite et négative à gauche.

En centrant un élément de surface  $dS$  au point P, on détermine un élément de volume  $d\tau = h.dS$  où  $h$  est l'épaisseur de la couche en P. Les deux sphères ayant subi une translation relative de distance  $a$ , et P étant positionné par  $\theta$ , on aura  $h = a.\cos\theta$ .

Cet élément de volume va donc porter une charge infinitésimale  $dq = \mu.d\tau = \mu.a.\cos\theta.dS$ .

On peut identifier cette distribution à une distribution surfacique (en considérant que l'épaisseur  $h$  reste faible). Sur une sphère chargée surfaciquement avec une densité  $\sigma$  non uniforme, on aurait, porté par l'élément de surface  $dS$  centré en P, positionné par  $\theta$ , une charge élémentaire  $dq = \sigma.dS$ .

Par identification, il vient :  $\sigma = \mu a \cos\theta$  avec  $\sigma_0 = \mu a$ .

$$Q_{tot} = \iint_{\text{sphère}} \sigma_o \cos \theta dS \quad \text{où } dS \text{ est l'élément de surface sphérique : } dS = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

L'intégration mène à  $Q_{tot} = 0$ .

c) Le calcul du champ se fait par sommation directe.

$$\vec{E}(O) = \int_{\text{sphère}} \vec{dE}(O) \quad \text{avec : } \vec{dE} = \frac{\sigma_o \cos \theta dS}{4\pi\epsilon_o R^2} \vec{u}_{PO}$$

Seule la projection de chaque élément de champ sur (Ox) contribuera effectivement au champ total en O.

$$dE_x = \vec{dE} \cdot \vec{u}_x = \frac{\sigma_o \cos \theta dS}{4\pi\epsilon_o R^2} \cos \alpha \quad \text{si } \alpha \text{ est l'angle entre l'élément de}$$

champ et l'axe (Ox) :  $\alpha = \pi - \theta$

Avec  $dS = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$ ,

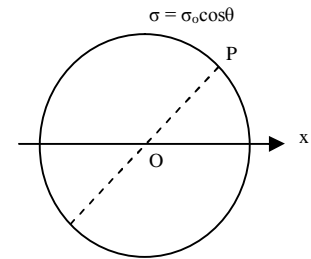
$$\text{il vient : } \vec{E}(O) = \int_0^\pi \frac{-\sigma_o}{4\pi\epsilon_o R^2} R^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \vec{u}_x$$

L'intégrale :  $I = \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$  se calcule par changement de variable : en posant  $u = \cos \theta$  on a

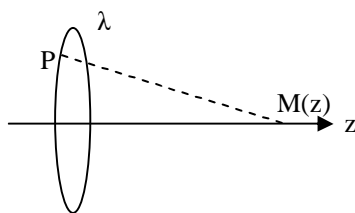
$$I = \int_{\cos 0}^{\cos \pi} -u^2 du = \left[ \frac{-u^3}{3} \right]_1^{-1} = 2/3 \quad \text{d'où finalement : } \vec{E}(O) = \frac{-\sigma_o}{3\epsilon_o} \vec{u}_x$$

Remarquons que le champ est orienté, comme on pouvait l'attendre, des charges positives vers les charges négatives, donc dans le sens opposé de l'axe (Ox).

Le calcul donnant le champ en A ou A', intersections de l'axe (Ox) avec la sphère chargée surfaciquement est sans objet : une distribution surfacique est un modèle qui ne peut pas être employé pour évaluer le champ électrique en des points situés sur la surface portant cette distribution. De façon analogue, on ne pourrait pas calculer le champ créé par une charge ponctuelle en la position même de cette charge. On parle de singularité, introduites par le modèle de distribution de charge.



6. Charge répartie sur un anneau : champ sur l'axe.



$q = \lambda \cdot 2\pi R$  où R est le rayon de l'anneau.

$$\text{Par sommation : } V(M) = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_o PM}$$

où  $PM = (R^2 + z^2)^{1/2}$ .

Dans l'intégration, z est constant, de même que R et  $\lambda$ .

Ce qui conduit à :

$$V(M) = \frac{\lambda \cdot 2\pi R}{4\pi\epsilon_o \sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_o \sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$E(z) \text{ s'obtient par } \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M). \text{ Soit : } \vec{E}(M) = -\frac{dV(z)}{dz} \vec{e}_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_o (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

En  $z = 0$ , maximum pour  $V(z)$  et annulation de  $E(z)$ .

En  $z = \pm R\sqrt{2}$ , maximum pour  $E(z)$  et point d'inflexion pour  $V(z)$ .

En  $z \rightarrow \infty$  et  $z \rightarrow -\infty$ , le potentiel comme le champ tendent vers 0.

## Applications du théorème de Gauss :

7. Calcul de la densité de charge d'une sphère de charge connue :

Le problème est évidemment à symétrie sphérique. le champ est donc de forme :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

1° méthode : appliquons le théorème de Gauss sur une sphère de rayon r :  $\Phi = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$

$$\text{s'écrit ici : } 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho d\tau = \int_0^r \rho(x) x^2 dx \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Remarque : la quantité notée x est une variable muette d'intégration, attention à ne pas faire de confusion avec la quantité r qui sert de borne à l'intégrale.

$$\text{Connaissant } E(r) = \alpha/r \text{ il vient : } 4\pi r \alpha = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(x) x^2 dx \cdot 4\pi$$

En dérivant cette relation par rapport à r, on tire :  $\alpha = (1/\epsilon_0) \cdot \rho(r) r^2$  soit en revenant à la notation r pour la variable de la fonction  $\rho(r)$  :  $\rho(r) = \alpha \epsilon_0 / r^2$ .

2° méthode : on applique le théorème de Gauss à une surface fermée délimitant une couche sphérique de rayon r et d'épaisseur dr. Cette surface est constituée de deux sphères concentriques, de rayons r et r + dr.

Le domaine ainsi délimité est infinitésimal, et porte une charge :

$$\delta Q = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Le calcul du flux à travers les deux sphères doit prendre en compte l'orientation des normales extérieures sur ces deux surfaces (dirigée vers le centre O pour la sphère de rayon r et vers l'infini pour la sphère de rayon r + dr), alors que l'unitaire radial est dirigé identiquement dans les deux cas.

L'expression du théorème de Gauss donne :

$$4\pi(r + dr)^2 E(r + dr) - 4\pi(r)^2 E(r) = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

En développant au premier ordre sur r :

$$4\pi(r^2 + 2rdr)[E(r) + (dE/dr) dr] - 4\pi(r)^2 E(r) = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

Soit après simplification et mise en forme :  $d(r^2 \cdot E(r)) = (1/\epsilon_0) \cdot \rho(r) r^2 dr$

En injectant  $E(r) = \alpha/r$ , il vient :  $\rho(r) = \alpha \epsilon_0 / r^2$

Remarque : on pouvait aussi écrire un flux à travers une sphère de rayon r :  $\Phi(r) = 4\pi r^2 \cdot E(r)$  et expliciter directement le flux à travers les deux sphères concentriques comme la variation de flux :

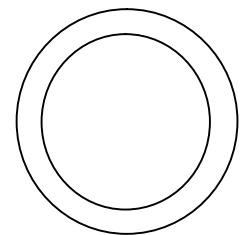
$$d\Phi = \Phi(r + dr) - \Phi(r) = d(4\pi r^2 \cdot E(r)) \text{ qui mène au même résultat.}$$

Calcul du champ à l'extérieur de la sphère chargée :

En écrivant le théorème de Gauss pour une surface sphérique de rayon r > R, on aura :

$$E_{\text{ext}} = Q_{\text{tot}} / 4\pi \epsilon_0 r^2.$$

$$\text{Avec } Q_{\text{tot}} = \iiint_{\text{sphère}} \rho(r) d\tau = \int_0^R \frac{\alpha}{r^2} \epsilon_0 4\pi r^2 dr = 4\pi \alpha \epsilon_0 R \text{ d'où : } E_{\text{ext}} = \alpha R / r^2.$$



### 8. Champ créé par deux sphères concentriques chargées en surface :

Le problème est évidemment à symétrie sphérique. le champ est donc de forme :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

Le théorème de Gauss écrit sur une sphère de rayon r donne :  $\Phi = 4\pi r^2 E(r) = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$

Il faut distinguer les différents cas selon la valeur de r en comparaison des rayons R et R' des sphères chargées respectivement selon des densités surfaciques :  $\sigma = q/4\pi R^2$  et  $\sigma' = q/4\pi R'^2$ .

Pour  $0 < r < R < R'$  :  $Q_{\text{int}} = 0$  donc  $E(r) = 0$

Pour  $R < r < R'$  :  $Q_{\text{int}} = q$  donc  $E(r) = q/4\pi\epsilon_0 r^2$

En  $r = R$ , le champ subit une discontinuité de valeur  $q/4\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma/\epsilon_0$ .

Pour  $R < R' < r$  :  $Q_{\text{int}} = q + q'$  soit avec  $q' = -2q$ ,  $Q_{\text{int}} = -q$ , donc  $E(r) = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$

En  $r = R'$ , le champ subit une discontinuité de valeur  $\lim_{r \rightarrow R'_+} E(r) - \lim_{r \rightarrow R'_-} E(r)$

soit :  $-q/4\pi\epsilon_0 R'^2 - q/4\pi\epsilon_0 R'^2 = \sigma'/\epsilon_0$ .

V(r) s'obtient en intégrant :  $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M)$  qui s'exprime ici par  $E(r) = -dV/dr$

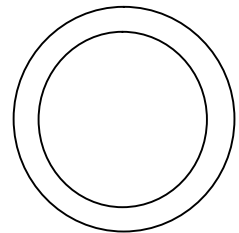
soit :  $V(r) = \int -E(r)dr$

Commençons par le domaine  $r > R'$ , avec la condition usuelle :

$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$

qui mène à :  $V(r) = -q/4\pi\epsilon_0 r$

Puis, pour  $R < r < R'$  :  $V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r + \text{cste}$ . Il faut écrire la condition de continuité en  $r = R' = 2R$  qui mène à  $\text{cste} = -q/4\pi\epsilon_0 R$  donc finalement :  $V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r - q/4\pi\epsilon_0 R$ .



Enfin, pour  $r < R < R'$  :  $V(r) = \text{cste}$  avec la condition de continuité en  $r = R$  qui mène cette fois à  $\text{cste} = 0$ .

En ajoutant une charge -q au centre du dispositif, on ajoute des termes :

de champ :  $-q/4\pi\epsilon_0 r^2$

de potentiel :  $-q/4\pi\epsilon_0 r$

à chacune des fonctions obtenues précédemment.

Ainsi, pour  $r < R < R'$  :  $E(r) = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$

pour  $R < r < R'$  :  $E(r) = 0$

et pour  $R < R' < r$  :  $E(r) = -2q/4\pi\epsilon_0 r^2$

A titre d'entraînement, il est chaudement recommandé d'effectuer le tracé des allures des différentes fonctions obtenus V(r) et E(r) en faisant apparaître les continuités ou discontinuités obtenues par notre étude.

### 9. Cavité dans une sphère :

Visualiser la répartition de charges décrites comme la superposition d'une répartition sphérique  $\rho$  de centre O et d'une répartition sphérique  $-\rho$  de centre O'.

Le champ créé par chacune de ces sphères est obtenu par le théorème de Gauss écrit pour une sphère de rayon r centré sur la sphère chargée considérée (soit O, soit O').

Notons R, le rayon de cette sphère chargée.

Le problème est évidemment à symétrie sphérique. le champ est donc de forme :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$

Le théorème de Gauss écrit sur une sphère de rayon r donne :  $\Phi = 4\pi r^2 E(r) = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$

Si  $r < R$  :  $Q_{\text{int}} = \rho \cdot (4/3)\pi r^3$  qui amène  $E(r) = \rho r / (3\epsilon_0)$  ;

Si  $r > R$  :  $Q_{\text{int}} = Q_{\text{tot}} = \rho \cdot (4/3)\pi R^3$  qui amène  $E(r) = \rho R^3 / (3r^2 \epsilon_0)$  ;

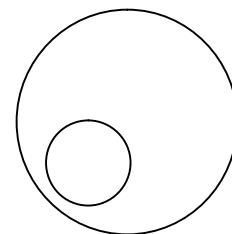
Le champ total sera la somme des termes de champs relatifs aux sphères de centres O et O' :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r + E(r')\vec{e}_{r'} \quad \text{avec } r = OM \text{ et } r' = O'M$$

Attention, les unitaires ne sont pas identiques !

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{OM} \neq \vec{e}_{r'} = \frac{\vec{O'M}}{O'M}$$

L'addition de ces deux termes ne donne de résultat notable que lorsque le point M est dans la cavité, c'est-à-dire que l'on a alors  $r < R$  et  $r' < R'$



$$\text{Il vient alors : } \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r + \frac{-\rho r'}{3\epsilon_0} \vec{e}_{r'} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}'$$

Le champ est uniforme dans la cavité :  $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO}'$ . En particulier, si  $O = O'$  (cavité concentrique), le champ va s'annuler partout à l'intérieur de la cavité.

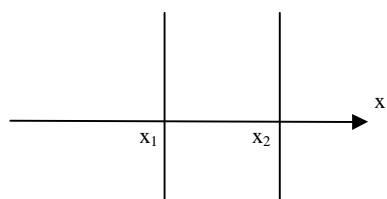
### 10. Champs produits par des plans chargés :

Le calcul général du champ dû à un plan infini chargé a été traité en cours, en appliquant le théorème de Gauss à une boîte cylindrique. Pour un plan de normale  $\vec{e}_x$  et de densité surfacique  $\sigma$ ,

on obtient :  $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$ . On procède ensuite par des superpositions de champs, en prenant garde

aux domaines concernés.

a) Deux plans parallèles, d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$  et de densités surfaciques  $\sigma_0$  et  $-3\sigma_0$  :



$$\text{pour } x < x_1 : \vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x - \frac{-3\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

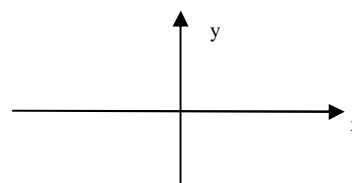
$$\text{pour } x_1 < x < x_2 : \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x - \frac{-3\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

$$\text{pour } x_1 < x_2 < x : \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x + \frac{-3\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x = \frac{-\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

b) Deux plans orthogonaux, l'un de normale  $\vec{e}_x$  et de charge surfacique  $-3\sigma_0$ , l'autre de normale  $\vec{e}_y$  et de charge surfacique  $+\sigma_0$ .

	$y < 0$	$y > 0$
$x < 0$	$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (-\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$	$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (-\vec{e}_x - 3\vec{e}_y)$
$x > 0$	$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$	$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\vec{e}_x - 3\vec{e}_y)$

Dans les 4 domaines, le champ a même module :  $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sqrt{10}$



### 11. Atome de Yukawa.

a) L'atome doit être globalement neutre. en sommant  $\rho(r)$  de 0 à l'infini, on doit trouver la charge

$$\text{d'un électron, soit } -e \text{ afin d'avoir : } +e + \int_0^{\infty} \frac{-C}{r} \exp\left(\frac{-r}{a}\right) 4\pi r^2 dr = 0$$

d'où :  $C = e/4\pi a^2$  (utiliser une intégration par partie).

b) Dans une sphère de rayon  $a$ , la charge intérieure vaudra :

$$Q_{\text{int}} = +e + \int_0^a \frac{-e}{4\pi a^2 r} \exp\left(\frac{-r}{a}\right) 4\pi r^2 dr = e \left( 1 - \int_0^a \frac{1}{a^2} \exp\left(\frac{-r}{a}\right) \cdot r dr \right)$$

Ce qui, toujours au moyen d'une intégration par partie, mène à :  $Q_{\text{int}} = e - 0,264 e$ , donc une charge totale  $+0,736e$ .

Remarque : attention à ne pas confondre  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  et « e » = exponentielle, notée exp.

$$\text{c) } dq = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{-e}{4\pi a^2 r} \exp\left(\frac{-r}{a}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{-e}{a^2} \exp\left(\frac{-r}{a}\right) r dr$$

Il serait plus exact d'examiner le passage par un maximum de la fonction  $\frac{dq}{dr} = \frac{-e}{a^2} r \exp\left(\frac{-r}{a}\right)$

$$\text{La dérivée de cette fonction sera : } \frac{d^2q}{dr^2} = \frac{-e}{a^2} \left( \exp\left(\frac{-r}{a}\right) - \frac{r}{a} \exp\left(\frac{-r}{a}\right) \right)$$

qui s'annule en  $r = a$ . On pourra vérifier que la dérivée suivante  $\frac{d^3q}{dr^3} = \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{-e}{a^2} r \exp\left(\frac{-r}{a}\right) \right)$  est

négative en  $r = a$ , et donc que  $\frac{dq}{dr} = \frac{-e}{a^2} r \exp\left(\frac{-r}{a}\right)$  admet bien un maximum en  $r = a$ .

d) Le problème est évidemment à symétrie sphérique. le champ est donc de forme :  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ .

Le théorème de Gauss écrit sur une sphère de rayon  $r$  donne :  $\Phi = 4\pi r^2 E(r) = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$

Soit pour  $r = a$ , d'après b) :  $E(a) = 0,736e/(4\pi\epsilon_0 a^2)$

e)  $E(r) = -dV(r)/dr$  peut s'intégrer,

et l'on connaît l'expression du champ à partir du théorème de Gauss.

$$\text{Pour une sphère de rayon } r, \text{ on a calculé : } Q_{\text{int}} = e \left( 1 - \int_0^r \frac{1}{a^2} \exp\left(\frac{-x}{a}\right) \cdot x dx \right)$$

$$\text{soit après calcul : } Q_{\text{int}} = e \left( 1 + \frac{r}{a} \right) \exp\left(\frac{-r}{a}\right)$$

$$\text{ce qui amène : } E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{ra} \right) \exp\left(\frac{-r}{a}\right)$$

$$\text{En remarquant : } \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \exp\left(\frac{-r}{a}\right) \right) = \frac{-1}{ra} \exp\left(\frac{-r}{a}\right) + \frac{-1}{r^2} \exp\left(\frac{-r}{a}\right)$$

on déduit l'intégration :  $V(r) = \int -E(r) dr$

qui donne finalement :  $V(r) = (e/4\pi\epsilon_0)(1/r)\exp(-r/a)$ .



## 12. Utilisation locale du théorème de Gauss :

a) Voir exercice n°6. Le calcul peut aussi être mené directement sur le champ, en pensant à projeter les éléments de champ sur la direction (Oz) qui portera le champ total.

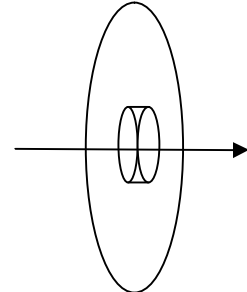
$$\text{On obtiendra : } E(z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

b) On Applique le théorème de Gauss à un petit cylindre centré sur O, de rayon r et dont les faces sont situées aux cotes z et -z.

La charge intérieure de ce cylindre est nulle, donc on aura un flux nul pour le champ.

Sur les faces du cylindre, seule la composante axiale du champ va intervenir dans le flux, et comme le rayon r du cylindre est très inférieur au rayon R de l'anneau, on peut supposer que la valeur de  $E_z$  reste très proche de sa valeur sur l'axe, calculée au a).

Pour la surface latérale du cylindre, c'est la composante radiale qui va intervenir dans le flux, et comme on fera tendre z vers 0, on peut utiliser sa valeur en z = 0 et à la distance r de l'axe.



$$\text{Il vient : } \Phi = 0 = \pi r^2 E_z(r=0, z) - \pi r^2 E_z(r=0, -z) + 2\pi r \cdot 2z \cdot E_r(r, z=0)$$

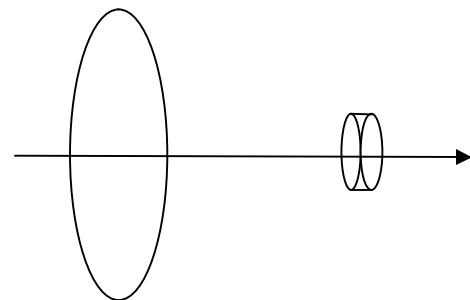
$$\text{On tire : } E_r(r, z) = \frac{-\lambda R}{4\epsilon_0 z} \frac{zr}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\text{Donc dans le plan de l'anneau, pour } z \rightarrow 0, \text{ on a : } \vec{E} = E_r(r, z=0) \vec{e}_r = \frac{-\lambda}{4\epsilon_0} \frac{r}{R^2} \vec{e}_r$$

c) On veut procéder par une démarche analogue.

La distance MN = r est très inférieure au rayon R de l'anneau et les cotes de M et N sont peu différentes. On applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r, centré sur l'axe (Oz), dont les faces sont aux cotes z et z + dz. La charge intérieure de ce cylindre est nulle, donc on aura un flux nul pour le champ.

$$\vec{E}(r, z) = E_r(r, z) \vec{u}_r + E_z(0, z) \vec{u}_z$$



$$\text{Il vient : } \Phi = 0 = -\pi r^2 E_z(r=0, z) + \pi r^2 E_z(r=0, z+dz) + 2\pi r \cdot dz \cdot E_r(r, z)$$

$$\text{On tire finalement : } E_r(r, z) = \frac{-r}{2} \frac{dE_z(0, z)}{dz}$$

et l'on utilise la fonction  $E_z(0, z)$  obtenue en (a).

$$\text{Ce qui donne : } E_r(r, z) = \frac{-\lambda R r}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} - 2z^2$$