ELECTROSTATIQUE II

DIPOLES ELECTROSTATIQUES, INTERACTION AVEC UN CHAMP EXTERIEUR, ENERGIE D'INTERACTION :

1. Etude des positions de Gauss :

A partir des expressions du champ électrostatique créé par un dipôle (voir cours), déterminer les positions pour lesquelles ce champ est colinéaire au moment dipolaire. Donner l'expression du champ pour chaque type de positions.

2. Moment dipolaire de la molécule d'eau :

La molécule d'eau, H_2O peut être modélisée comme un édifice triatomique constitué d'un atome d'oxygène affecté d'une charge –2.e et de deux atomes d'hydrogène portant chacun une charge +e (e = $1{,}6.10^{-19}$ C). L'angle de valence existant entre les deux liaison O-H est α = 104° 45 '. La longueur de la liaison O-H est a = 0,952 Angström = 0,0952 nm.

Calculer le moment dipolaire de cette molécule et l'exprimer numériquement en C.m puis en Debye (4,8 D = $1{,}6.10^{-29}$ C.m).

Calculer l'intensité maximale du champ créé par cette molécule à une distance r = 1 nm.

Quelle est la variation de l'énergie d'interaction de la molécule avec un champ externe E_o d'intensité 100 Vm^{-1} quand la molécule passe d'une position où elle est colinéaire à ce champ à une position où elle lui est orthogonale ?

La molécule d'eau a en fait un moment dipolaire p = 1,88 D. Proposer une explication.

3. Distribution dipolaire :

Une sphère de centre O et de rayon R est globalement neutre. Sous l'influence d'un champ extérieur $\vec{E}_O$, cette sphère va subir une polarisation que l'on peut modéliser comme un glissement d'ensemble des charges respectivement positives et négatives présentes dans le matériau constituant cette sphère selon la direction de $\vec{E}_O$ et dans des sens opposés.

La situation électrostatique apparaît alors équivalente à celle dûe à la superposition de deux sphères de centres O_1 et O_2, distants de a, portant des densités volumiques de charges respectives $+\mu$ et $-\mu$.

On montre que pour a faible et μ grande, avec $a.\mu = \sigma_O$, la situation peut être identifiée à celle d'une sphère portant une charge surfacique σ de la forme : $\sigma = \sigma_O.\cos\theta$; où θ représente l'angle (xOM) formé par un diamètre (D) fixé de la sphère, de vecteur unitaire **i**, et la demi-droite [OM), M étant un point quelconque situé à la surface de la sphère.

1°) Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, le champ à l'intérieur de la sphère.

2°) Calculer le potentiel puis le champ à l'extérieur. Vérifier que les conditions de passage du champ électrostatique sont respectées, à savoir : continuité de la composante tangentielle et discontinuité σ/ε_O de sa composante normale à la traversée de la couche chargée.

3°) Tracer une allure du diagramme électrique (équipotentielles et lignes de champ).

4. Dipôle dans un champ :

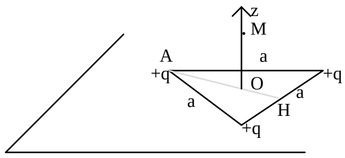
Soit un axe de référence (Ox), de vecteur unitaire $\vec{i}$, et l'on pose par convention : V = 0 pour x = 0. On considère deux plans infinis, d'abcisses respectives x = -a et x = +a, uniformément chargés avec une densité surfacique $-\sigma$ et $+\sigma$.

a)Déterminer en fonction de x le champ E, le potentiel V et l'allure des courbes E(x) et V(x). (cf un des exercices de la feuille électrostatique I).

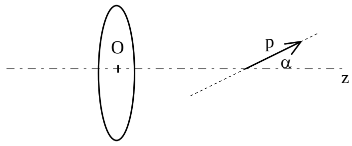
b) Un dipôle $\vec{p} = p.\vec{u}$ est maintenant placé entre les deux plans du a) au voisinage de x = 0. On désigne par α l'angle $(\vec{i},\vec{u})$. Quelle est l'énergie potentielle d'interaction E_P de ce dipôle en fonction de p, σ, α et ε_O ? Déterminer les positions d'équilibre stable ou instable du dipôle entre les plans.

5. Interaction d'un dipôle dans un champ :

On dispose trois charges +q en triangle équilatéral. Un dipôle de moment $\vec{p}$ est libre de se déplacer sur la normale au plan des trois charges passant par le centre de gravité O du triangle ; $\vec{p}$ restant aligné sur cette normale. Etudier les positions d'équilibre possibles et discuter leur stabilité. La distance entre deux charges sera notée a, et la cote d'un point M de l'axe (Oz) correspondant à la normale précedemment décrite sera notée z.



6. Interaction d'un dipôle avec un anneau chargé :



1°) Calculer le champ électrostatique créé par un anneau de centre O et de rayon R portant une charge linéique uniforme λ, sur l'axe Oz de l'anneau.
2°) En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz, de rayon r <<R dont les faces sont situées aux cotes z et z + dz, calculer la valeur du champ créé par l'anneau au voisinage de son axe, en ne tenant compte que des termes du premier ordre.
3°) Quelles sont les actions mécaniques exercées par l'anneau sur un dipôle p disposé comme ci-dessus ?
4°) On choisi maintenant $\alpha = 0$. Le dipôle peut seulement coulisser sans frottement sur l'axe Oz. Déterminer la ou les positions d'équilibre. Discuter de leur stabilité et calculer éventuellement la période des petites oscillations que le dipôle peut être amené à subir le long de l'axe Oz.

R : 1) Les positions de Gauss sont constituées des points situés sur l'axe portant le dipôle, de moment $\vec{p} = p\vec{u}$, alors : $\vec{E} = \frac{+2p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{u}$; et des points du plan orthogonal à cet axe, passant par le centre du dipôle alors : $\vec{E} = \frac{-p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{u}$.

2) p = 2p(O-H)cos(α/2) = 2ae.cos(α/2). p = 1,86.10^{-29}C.m = 5,58 D.
E = $2p/4\pi\varepsilon_o r^3$ = 3,35.10^8 V.m^{-1}.U = p.E_o = 1,86.10^{-27} J. p = 1,88 D car les liaisons O-H ne sont pas totalement polarisées, et les doublets non liants portés par l'atome d'oxygène apportent une contribution qui vient diminuer le moment dipolaire de l'ensemble.

3) 1°) th. de Gauss et th. de superposition : $\vec{E} = -\frac{\mu a}{3\varepsilon_o}\vec{u}$. 2°) dist. dipolaire, $\vec{p} = q\overrightarrow{O_1O_2}$ avec q = (4/3)$\pi\mu$3.

4) Entre les plans : $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{i}$; hors des plans $\vec{E} = \vec{0}$. En étudiant $E_p = -\vec{p} \bullet \vec{E}$, on trouve deux extréma : un maximum pour α = 0 (éq. instable) ; un minimum pour $\alpha = \pi$ (éq. stable).

5) $\vec{E} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0} z\left(\frac{a^2}{3} + z^2\right)^{-3/2}\vec{k}$. Puis $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$, avec $U = -\vec{p} \bullet \vec{E}$ soit : $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p} \bullet \vec{E}\right)$

soit finalement ici $\vec{F} = p\frac{dE}{dz}\vec{k}$. Equilibre pour F = 0 ;

donc deux positions d'équilibre : z = $a/\sqrt{6}$ (stable) et z = - $a/\sqrt{6}$ (instable).

6) 1°) $E(r=0,z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$; 2°) $\vec{E}(r,z) = E(r=0,z)\vec{e}_z - \frac{r}{2}\frac{dE(r=0,z)}{dz}\vec{e}_r$

3°) moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$; $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\left(E_p\right) = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p} \bullet \vec{E}\right)$; 4°) 2 posit° d'équil. : $z = \pm R/\sqrt{2}$, resp. stable et instable. Pour z = $\varepsilon + R/\sqrt{2}$,on développe F à l'ordre 1 sur ε. Equation du mouvement : $\ddot{\varepsilon} + \frac{8p\lambda}{9\sqrt{3}\varepsilon_o R^3 m}\varepsilon = 0$ oscillations à pulsation $\omega_o = \left(\frac{8p\lambda}{9\sqrt{3}\varepsilon_o R^3 m}\right)^{1/2}$

7. Répartition quadripolaire.

On considère sur un axe (Ox) la répartition de quatre charges : deux charges +q aux points d'abcisses +a et -a et deux charges -q aux points d'abcisses +b et -b. Déterminer le champ et le potentiel électriques en un point M quelconque, situé à une distance r du point O, grande devant a et b.

7) En s'inspirant de la méthode employée pour un dipôle, on écrit : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{A_1}} - \frac{1}{r_{B_1}} + \frac{1}{r_{A_2}} - \frac{1}{r_{B_2}}\right)$

dont on calcule le développement limité <u>au deuxième ordre</u> en a/r, à partir des expressions du type : $1/r_{A1} = (r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{-1/2}$ *. Un développement limité au 1° ordre (cas du dipôle) conduirait ici à V = 0.* $\vec{E}$ *s'obtient par* $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ *.*