ELECTROSTATIQUE II (Corrigés)

DIPOLES ELECTROSTATIQUES, INTERACTION AVEC UN CHAMP EXTERIEUR, ENERGIE D'INTERACTION :

1. Etude des positions de Gauss :

Le potentiel créé par un dipôle est d'expression : $V(r,\theta) = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}$ et l'on en déduit le champ électrostatique : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta}$ (V est indépendant de l'angle sphérique φ).

Il vient : $\vec{E} = \dfrac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{e_r} + \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{e_\theta}$

Par ailleurs, on peut projeter le moement dipolaire sur la base polaire : $\vec{p} = p\cos\theta\vec{e_r} - p\sin\theta\vec{e_\theta}$

Le fait que le champ soit colinéaire au moment dipolaire se traduit par : $\vec{p} \wedge \vec{E} = \vec{0}$

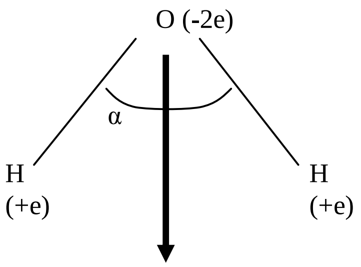
ce qui conduit à : $\dfrac{3p^2}{4\pi\varepsilon_o r^3}\cos\theta\sin\theta = 0$

de solutions : sinθ = 0 ou cosθ = 0 soit : θ = 0 ou θ = π ou θ = π/2 ou θ = -π/2.

Les positions de Gauss sont constituées des points situés sur l'axe portant le dipôle, de moment $\vec{p} = p\vec{u}$, (θ = 0 ou θ = π) ; alors : $\vec{E} = \dfrac{+2p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{u}$;

et des points du plan orthogonal à cet axe, passant par le centre du dipôle (θ = π/2 ou θ = -π/2) alors : $\vec{E} = \dfrac{-p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{u}$.

2. Moment dipolaire de la molécule d'eau :



Pour cet édifice, où les liaisons O-H sont hypothétiquement complètement polarisées, on somme vectoriellementles contributions de ces deux liaisons :
$P_{H2O} = 2.P_{OH}\cos(\alpha/2) = 2e.a\cos(\alpha/2)$
où a est la distance de O à H.
AN = $P_{H2O} = 1{,}86.10^{-29}$C.m = 5,58 D.

Pour r = 1 nm, le champ maximal sera obtenu sur l'axe du dipôle (θ = 0 ou π) et l'on aura alors : $\vec{E} = \dfrac{+2p}{4\pi\varepsilon_o r^3}\vec{u}$

AN : E = $3{,}35.10^{8}$V.m^{-1}.

L'énergie d'interaction est : $U_{int} = -\vec{p}\bullet\vec{E}$

Lorsque l'on passe d'une position où le dipôle est colinaire et de même sens que le champ (dite « parallèle ») à une position où le dipôle est colinaire et de sens opposé au champ (dite « antiparallèle »), $U_{int} = -\vec{p}\bullet\vec{E}$ variera de $-pE_o$ à $+p.E_o$.

Lorsque l'on passe d'une position où le dipôle est colinaire et de même sens que le champ (dite « parallèle ») à une position où le dipôle est orthogonal au champ, $U_{int} = -\vec{p}\bullet\vec{E}$ variera cette fois de $-pE_o$ à 0, donc $\Delta U_{int} = p.E_o = 1{,}86.10^{-27}$J pour E_o= 100 V.m^{-1}.

En réalité, = 1,88 D car les liaison OH ne sont que pratiellement polarisées. De plus les doublets non liants potés par l'oxygène vont intervenir dans le ùmonment dipolaire de la molécule.

3. Distribution dipolaire :

1) En utilisant le principe de superposition, sur le premier modèle proposé (2 sphères de densités volumiques μ et –μ dont les centres sont décalés de a) : pour chaque sphère, on applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r, intérieure à la sphère portant les charges et concentrique.

Il vient : $4\pi r^2 E_1(r) = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{4}{3}\pi r^3 \mu$ ou $4\pi r^2 E_2(r) = -\frac{1}{\varepsilon_o}\frac{4}{3}\pi r^3 \mu$

Ce qui donne respectivement : $E_1(r) = \frac{\mu}{3\varepsilon_o} r$ ou $E_2(r) = \frac{-\mu}{3\varepsilon_o} r$

On additionne ces deux termes, en prenant garde au fait que les distance « r » mises en jeu sont respectivement les distances entre M et O_1 et entre M et O_1. Les deux termes de champ sont d'ailleurs dirigés par des unitaires $\overrightarrow{e_{r1}} = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M}$ et $\overrightarrow{e_{r2}} = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M}$

On obtient : $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{\mu\overrightarrow{O_1M}}{3\varepsilon_o} - \frac{\mu\overrightarrow{O_2M}}{3\varepsilon_o} = \frac{\mu}{3\varepsilon_o}\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{-\mu}{3\varepsilon_o} a\overrightarrow{e_x}$

le champ électrique est donc uniforme à l'intérieur de la sphère polarisée.

2) En appliquant la même démarche, mais pour des points extérieurs aux sphères :

$4\pi r^2 E_1(r) = \frac{1}{\varepsilon_o}\frac{4}{3}\pi R^3 \mu$ ou $4\pi r^2 E_1(r) = -\frac{1}{\varepsilon_o}\frac{4}{3}\pi R^3 \mu$

L'addition des deux temres n'est pas simple ! les distance « r » mises en jeu sont respectivement les distances entre M et O_1 et entre M et O_1. Les deux termes de champ sont d'ailleurs dirigés par des unitaires $\overrightarrow{e_{r1}} = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M}$ et $\overrightarrow{e_{r2}} = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M} \ldots$

En suivant la démarche suggérée dans le sujet, on retrouve la méthode appliquée en cours pour le calcul du champ d'un dipôle.

Chaque sphère crée un potentiel de forme : $V_{1ou2}(r) = \frac{\pm\mu R^3}{3\varepsilon_o r}$ avec $r_1 = O_1M$ et $r_2 = O_2M$.

On a donc en additionnant : $V(M) = \frac{\mu R^3}{3\varepsilon_o}\left(\frac{1}{O_1M} - \frac{1}{O_2M}\right)$

Dans les conditions d'approximation dipolaire : $a = O_1O_2 << R < r_1$ ou r_2.

Faisons un DL au premier ordre pour les termes $1/O_1M$ et $1/O_2M$.

$1/O_1M = \left(\overrightarrow{O_1M}^2\right)^{-1/2}$ avec $\overrightarrow{O_1M}^2 = \left(\overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + ar\cos(\pi-\theta) + r^2$

donc : $\frac{1}{O_1M} = \frac{1}{r}\left(\frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r}\cos(\pi-\theta) + 1\right)^{-1/2}$

soit avec un DL1 en a/r : $\frac{1}{O_1M} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos(\pi-\theta)\right) = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$

De même on aboutit à : $\frac{1}{O_2M} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right)$

Finalement en additionnant les termes de potentiel, on obtient : $V(M) = \frac{\mu R^3}{3\varepsilon_o}\frac{a}{r^2}\cos\theta$

On tire le champ : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta}$

soit : $\vec{E} = \dfrac{2\mu R^3 a}{3\varepsilon_o r^3}\cos\theta\,\vec{e_r} + \dfrac{\mu R^3 a}{3\varepsilon_o r^3}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

ce qui correspond au champ et au potentiel créés par un dipôle qui serait constitué d'un doublet de charges +q et –q séparés d'une distance a, avec q = $\dfrac{4}{3}\pi R^3\mu$. (Ce résultat n'étant valide qu'en des points M externes aux deux distributions sphériques de densité μ et –μ).

Examinons la discontinuité du champ qui apparaît à la traversée de la couche chargée, soit pour r = R, et pour une valeur quelleconque de θ.

Pour r →R_- , $\vec{E} = \dfrac{-\sigma_o}{3\varepsilon_o}\vec{e_x}$ en posant σ_o= μ.a.

Soit en projetant sur la base polaire : $\vec{E} = \dfrac{-\sigma_o}{3\varepsilon_o}\cos\theta\,\vec{e_r} + \dfrac{\sigma_o}{3\varepsilon_o}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

Pour r → R_+ , $\vec{E} = \dfrac{2\sigma_o}{3\varepsilon_o}\cos\theta\,\vec{e_r} + \dfrac{\sigma_o}{3\varepsilon_o}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

On constate :

- une continuité de la composante tangentielle (colinéaire à $\vec{e_\theta}$),
- une discontinuité de la composante normale (colinéaire à $\vec{e_r}$).

La discontinuité du champ sera : $\Delta\vec{E} = \dfrac{2\sigma_o}{3\varepsilon_o}\cos\theta\,\vec{e_r} - \cos\theta\,\vec{e_r} = \dfrac{\sigma_o}{\varepsilon_o}\cos\theta\,\vec{e_r} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{e_r}$

4. Dipôle dans un champ :

a) Tout plan orthogonal aux plans chargés est un plan de symétrie. Le champ est donc porté par les direction (Ox). Il y a invariance pour toute translation orthogonale à(Ox), donc le champ ne dépend que de x. Ona donc : pour x < -a : $\vec{E} = \vec{0}$

Enfin, le le plan confondu avec un plan chargé donné est un plan de symétrie. Le terme de champ produit par ce plan chargé doit donc lui être symétrique.

En écrivant le théorème de Gauss sur une boîte cylindrique centrée sur l'un des plans chargés (situation étudiée en cours), on aura Φ = Q_{int}/ε_o qui s'explicitera selon : 2.E(x).S = σ.S /ε_o pour x > 0, ce qui conduit à E(x) = σ.S/(2ε_o).

En superposant les champs produits respectivement par chacun des plans chargés, d'abscisses respectives –a et +a, on obtient, selon les différents domaines de x concernés :

pour x < -a : $\vec{E} = \vec{0}$; pour –a < x < a : $\vec{E} = \dfrac{-\sigma}{\varepsilon_o}\vec{e_x}$; pour a < x : $\vec{E} = \vec{0}$.

En fixant arbitrairement V(0) = 0 et en intégrant: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ selon : $V(x) = \int E(x)dx + cste$ on en déduit :

pour x < -a : V(x) = -σa/ε_o ; pour –a < x < a : V(x) = +σx/ε_o ; pour a < x : V(x) = +σa/ε_o .

b) $\vec{p} = p\vec{u}$ est placé entre les deux plans, où règne le champ : $\vec{E} = \dfrac{-\sigma}{\varepsilon_o}\vec{e_x}$

L'énergie potentielle d'interaction est : E_p = σp.cosα/ε_o si α = $(\vec{p},\vec{E})$.

La position d'équilibre du dipôle correspondra à une orientation pour laquelle E_p sera extrémale. $\frac{dEp}{d\alpha} = 0$ amène : $-\sigma p.\sin\alpha/\varepsilon_o$ donc $\sin\alpha = 0$.

Deux solutions : $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$.

Equilibre stable pour un minimum de $E_p(\alpha)$, c'est à dire pour $\frac{dEp}{d\alpha} = 0$ et $\frac{d^2Ep}{d\alpha^2} > 0$:

la condition $\frac{d^2Ep}{d\alpha^2} > 0$ s'explicite par : $-\sigma p.\sin\alpha/\varepsilon_o > 0$

La solution $\alpha = \pi$ correspond donc à un équilibre stable. $\vec{p} = p\vec{u}$ est alors "parallèle" au champ (colinéaire et orienté dans le même sens).

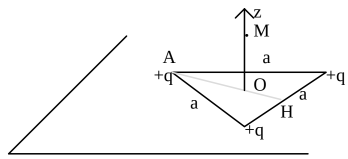
Equilibre instable pour un maximum de $E_p(\alpha)$, c'est à dire pour $\frac{dEp}{d\alpha} = 0$ et $\frac{d^2Ep}{d\alpha^2} < 0$:

la condition $\frac{d^2Ep}{d\alpha^2} < 0$ s'explicite par : $-\sigma p.\sin\alpha/\varepsilon_o < 0$

La solution $\alpha = 0$ correspond donc à un équilibre instable. $\vec{p} = p\vec{u}$ est alors "anti-parallèle" au champ (colinéaire et orienté dans le sens opposé).

5. Interaction d’un dipôle dans un champ :

Calculons d'abord le champ électrostatique créé par les trois charges. Ce champ est porté par l'axe (Oz), qui est un axe de symétrie ternaire pour la distribution.



En notant $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3}$ où l'on somme les trois termes de champ relatifs au trois charges, on aura $\vec{E} = \left(3\vec{E_1} \bullet \vec{e_z}\right)\vec{e_z} = \left(3E_1 \cos\alpha\right)\vec{e_z}$

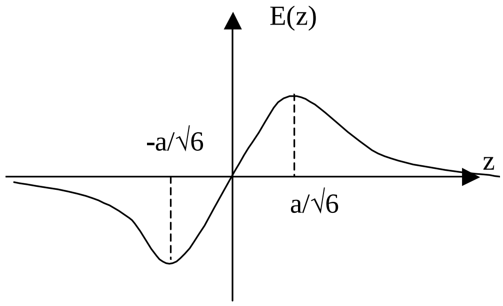
avec : $E_1 = q / (4\pi\varepsilon_o AM^2)$ et α étant l'angle (AMO), $\cos\alpha = OM/AM$. $OM = |z|$.

Par le théorème de Pythagore : $AM^2 = AO^2+OM^2$

où AO vaut les 2/3 de la hauteur du triangle équilatéral de côté a : $AO = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

(car cos30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Il vient : $AM^2 = z^2 + \frac{a^2}{3}$.

Finalement : $\vec{E} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{z}{\left(z^2 + \frac{a^2}{3}\right)^{3/2}}\vec{e_z}$



Remarque : Le sens du champ doit s'inverser selon que l'on est au dessus ou au dessous du plan des trois charges, donc changer avec le signe de z, ce qui est cohérent avec l'expression établie.

L'action du champ sur le dipôle se traduit par :

- un couple de moment : $\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ qui est ici nul puisque le dipôle et le champ sont tous deux portés par (Oz) ;

- une force résultante : $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\left(\vec{p} \bullet \vec{E}\right)$ où $\vec{p} \bullet \vec{E} = \frac{3pq}{4\pi\varepsilon_o} \frac{z}{\left(z^2 + \frac{a^2}{3}\right)^{3/2}}$

ce qui conduit après calculs à : $\vec{F} = \frac{3pq}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{\left(z^2 + \frac{a^2}{3}\right)^{3/2}} \left(1 - \frac{3z^2}{z^2 + \frac{a^2}{3}}\right)\vec{e_z}$.

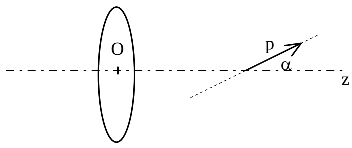
L'annulation de cette force s'obtient pour : $1 - \frac{3z^2}{z^2 + \frac{a^2}{3}}$ soit : $\frac{a^2}{3} - 2z^2 = 0$

donc pour : $z = \pm \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Ces deux positions correspondent à des extrémas de l'énergie potentielle d'interaction :
$U_{int} = -\vec{p} \bullet \vec{E}$ =-p.E(z)

On constate que, comme p = cste, les extrémas de U_{int} vont ici correspondre à des extrémas de E(z). L'étude mathématique de E(z) montre que pour $z = +\frac{a}{\sqrt{6}}$ on aura un maximum de E(z) et donc un minimum de U_{int} (position d'équilibre stable) et que pour $z = -\frac{a}{\sqrt{6}}$ on aura un minimum de E(z) et donc un maximum de U_{int} (position d'équilibre instable).
Remarque : cette dernière position correspond à un maximum de l'intensité du champ, mais le dipôle étant orienté dans le sens $\vec{p} = p\vec{e_z}$, il est alors antiparallèle au champ.

6. Interaction d'un dipôle avec un anneau chargé :



1°) Le plus simple est sûrement de calcule le poentiel créé en un point M de l'axe de l'anneau.

$$V(r=0,z) = \int_{anneau} \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_o \left(R^2 + z^2\right)^{1/2}} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o} \frac{1}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

puis en intégrant: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ selon : $V(z) = \int E(z)dz + cste$ on en déduit :

$$E(r=0,z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o} \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}} .$$

2°) En tout point M de l'espace, le plan (M,(Oz) sera un plan de symétrie qui doit porter le champ, qui n'aura donc pas de composante orthoradiale : $\vec{E} = E_r \vec{e_r} + E_z \vec{e_z}$.
Il y a par ailleurs invariance pour toute rotation autour de l'axe (Oz) ; les coordonnées E_r et E_z du champ seront donc indépendante de la coordonnée de position θ.
Finalement : $\vec{E} = E_r(r,z)\vec{e_r} + E_z(r,z)\vec{e_z}$
Pour des points situés à proximité (mais en dehors) de l'axe (Oz), on aura donc :
- une composante axiale, vraisemblablement proche de celle que l'on aurait exactement sur l'axe : $E_z(r,z) \approx E_z(0,z)$ car r << R ;
- une composante radiale $E_r(r,z)$, non nulle hors de l'axe, qu'il nous faut déterminer.
Pour ce, on applique le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz, de rayon r <<R dont les faces sont situées aux cotes z et z + dz. On ne tiendra compte que des termes du premier ordre.

La charge intérieure à ce cylindre étant nulle, le flux du champ à travers le cylindre doit être nul. On distingue les termes de flux à travers le disque de cote z, de flux à travers le disque de cote z + dz, et le flux à travers la surface latérale du cylindre.

$$\Phi = \Phi_z + \Phi_{z+dz} + \Phi_{lat} = -E_z(0,z).\pi r^2 + E_z(0,z+dz).\pi r^2 + E_r(r,z).2\pi r dz = 0$$

dont on tire : $E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dE(r=0,z)}{dz}$

Et donc finalement en un point M proche de l'axe : $\vec{E}(r,z) = E(r=0,z)\vec{e}_z - \frac{r}{2}\frac{dE(r=0,z)}{dz}\vec{e}_r$

En employant le résultat du (1°), $E_z(r=0,z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$

on calcule : $E_r(r=0,z) = \frac{-\lambda R r}{4\varepsilon_o}\frac{R^2-2z^2}{(z^2+R^2)^{5/2}}$.

3°) Les actions mécaniques à envisager sur le dipôles sont : le moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ et la résultante des forces $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p) = \overrightarrow{grad}(\vec{p} \bullet \vec{E})$;

Ici, le dipôle est orienté avec un moment dipolaire faisant un angle α avec l'axe (Oz).

On aura donc : $\vec{\Gamma} = -pE_r(0,z)\vec{u}$ action qui doit tendre à réaligner le dipôle sur l'axe (Oz), dans le sens du champ.

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(\vec{p} \bullet \vec{E}) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}\right)(p\sin\alpha.E_r + p\cos\alpha.E_z)$$

soit : $\vec{F} == \left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}\right)\left(-\frac{pr}{2}\sin\alpha.\frac{dE_z}{dz} + p\cos\alpha.E_z\right)$

En ne conservant que les termes du premier ordre, donc en négligeant :

$\left(\frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}\right)\left(-\frac{pr}{2}\sin\alpha.\frac{dE_z}{dz}\right)$ on a : $\vec{F} = -\frac{p}{2}\sin\alpha.\frac{dE_z}{dz}\vec{e_r} + p\cos\alpha.\frac{\partial E_z}{\partial z}\vec{e_z}$.

4°) On choisit α = 0 (ouf !). le moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ est alors nul ; la résultante des forces s'annulera si $\vec{F} = -\frac{p}{2}\sin\alpha.\frac{dE_z}{dz}\vec{e_r} + p\cos\alpha.\frac{\partial E_z}{\partial z}\vec{e_z} = p\frac{dE_z}{dz}\vec{e_z} = \vec{0}$

On en déduit 2 posit° d'équilibre : z = $\pm R/\sqrt{2}$, respectivement stable et instable.

On peut en effet discuter de leur stabilité en fonction du signe de $\frac{dF}{dz} = p\frac{d^2E_z}{dz^2}$ qui vaut, après calculs : $\frac{dF}{dz} = \frac{\lambda p R}{2\varepsilon_o}\frac{-4z}{(R^2+z^2)^{5/2}}$

La RFD écrite pour le dipôle donne en projection sur (Oz) : $m\ddot{z} = F(z)$

Pour z = ε+ $R/\sqrt{2}$, on développe F(z) à l'ordre 1 sur ε, et l'on a $m\ddot{z} = m\ddot{\varepsilon}$.

$$F(z) \approx F(R/\sqrt{2}) + \varepsilon.\left.\frac{dF(z)}{dz}\right)_{z=R/\sqrt{2}}$$

On obtient alors une équation du mouvement de forme : $\ddot{\varepsilon} + \frac{8p\lambda}{9\sqrt{3}\varepsilon_o R^3 m}\varepsilon = 0$

Le mouvement est donc constitué d'oscillations harmoniques de pulsation $\omega_o = \left(\frac{8p\lambda}{9\sqrt{3}\varepsilon_o R^3 m}\right)^{1/2}$ du dipôle autour de sa position d'équilibre stable z = $R/\sqrt{2}$.