

## MAGNETOSTATIQUE (Corrigés)

### 1. Champ magnétique du modèle de Bohr :

1°) Ecrivons la RFD dans le référentiel du noyau, pour l'électron.  $m\vec{\gamma} = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_r$ . Dans le cas

d'une orbite circulaire de rayon  $a$  :  $\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  ;  $\vec{\gamma} = a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

La projection de la RFD sur la direction orthoradiale implique donc :  $\dot{\theta} = cste$  donc une norme de la vitesse  $v = a\dot{\theta} = cste$ .

La projection de la RFD sur la direction radiale amène :  $a\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{a} = \frac{e^2}{m \cdot 4\pi\epsilon_0 a^2}$

D'où finalement :  $v = \frac{e}{\sqrt{m \cdot 4\pi\epsilon_0 a}}$  AN :  $v = 2,18 \cdot 10^6$  m/s  $\ll c = 3 \cdot 10^8$  m/s, non relativiste.

2°) Le mouvement de l'électron est analogue à une spire circulaire qui serait parcourue par un courant d'intensité  $I_{\text{éq}} = e/T$  où  $T$  est la période de révolution de l'électron autour du noyau.

En utilisant la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \int_D \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \int_D \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \frac{\mu_0 e}{2aT} \vec{u}_z$$

Avec  $T = 2\pi a/v$  on a :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e}{4\pi a^2} v \vec{u}_z$$

AN :  $B = 12,5$  T.

### 2. Champ magnétique créé par une nappe de fils :

Orientons l'espace selon un système d'axes directs (O,x,y,z). Les fils sont supposés parallèles à l'axe (Ox), l'intensité  $I$  étant orientée dans le sens de cet axe.

Tout plan parallèle à (Oyz) est un plan d'antisymétrie et va donc contenir de champ qui règne en un point de ce plan. Le champ magnétique n'a donc pas de composante selon (Oz).

En tout point passe un plan parallèle à (Oxz) qui est un plan de symétrie de la distribution. Le champ magnétique devant lui être orthogonal, ce champ est donc colinéaire à (Oy).

Il y a invariance du problème par translation selon (Ox) et (Oy).

Le champ est donc de forme :  $\vec{B} = B(z)\vec{e}_y$

Le plan (Oxy) contenant les fils est un plan de symétrie de la distribution. Donc  $B(z) = -B(-z)$ .

Considérons un contour (CDEF) rectangulaire pour appliquer le théorème d'Ampère.

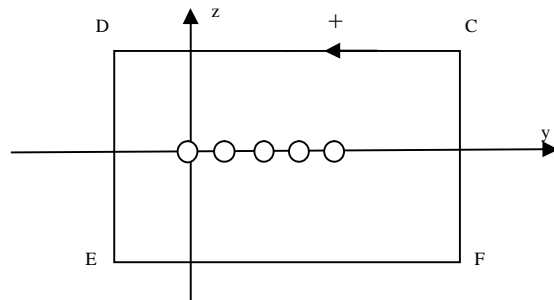
Vue l'orientation du contour :  $\mu_0 \cdot I_{\text{enlacé}} = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot L$

où  $n$  est le nombre de fil par unité de longueur et  $L$  est la distance  $L = CD = EF$ .

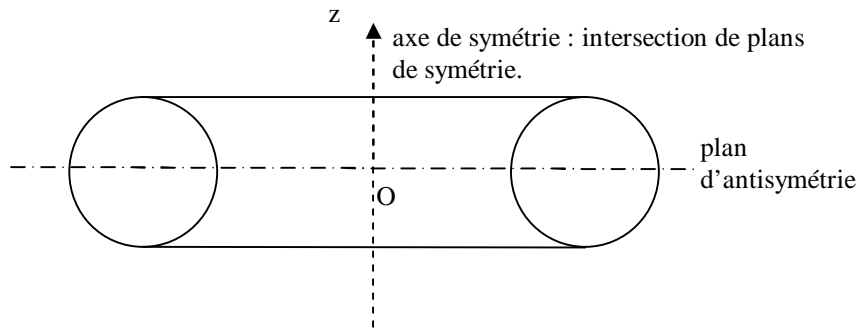
La circulation vaut, en explicitant les termes dans l'ordre des différents segments :

$$\int_{CDEF} \vec{B} \cdot d\vec{l} = -B(z) \cdot L + 0 + B(-z) \cdot L + 0 = -2B(z) \cdot L$$

On déduit donc :  $B(z) = -\mu_0 \cdot nI/2$  pour  $z > 0$  et  $B(z) = \mu_0 \cdot nI/2$  pour  $z < 0$ .



### 3. Champ créé par un tore circulaire :



En tout point M de l'espace passe un plan de symétrie (M, Oz). Le champ magnétostatique lui est orthogonal, il aura donc une direction orthoradiale par rapport à l'axe (Oz).

Ayant invariance par rotation autour de (Oz), ce champ ne dépendra que du rayon cylindrique r et de la cote z.

Considérons un contour situé dans un plan orthogonal à (Oz), formé d'un secteur angulaire de sommet A appartenant à (Oz), fermé par un arc de cercle (BC) centré sur A.

$$\text{Par le théorème d'Ampère } \int_{ABC} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\text{enlacé}}$$

Les segments [AB] et [AC] n'apportent aucune contribution à la circulation, car le champ est orthogonal à ces segments. La circulation se réduit à un terme  $B(r, z) \cdot r \cdot \Delta\theta$  où  $\Delta\theta$  est l'angle (BAC) et r et z les coordonnées radiale et axiale de B et C.

Si l'arc (BC) est situé à l'extérieur du tore,  $I_{\text{enlacé}} = 0$  donc  $B(r, z) = 0$ .

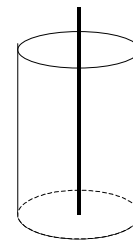
Si l'arc (BC) est situé à l'intérieur du tore, le contour va enlacer un nombre de spire valant  $N \cdot \Delta\theta / 2\pi$ , il vient donc :  $B(r, z) \cdot r \cdot \Delta\theta = \mu_0 \cdot \Delta\theta \cdot N / 2\pi$  (en ayant orienté le contour dans un sens cohérent) soit finalement

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

On peut aussi raisonner sur des contours circulaire (soit pour  $\Delta\theta = 2\pi$ ).

### 4. Champ magnétique créé par un conducteur coaxial :

En négligeant les effets de bords, la présence des plans de symétries (tous les plans passant par l'axe du cylindre) amène un champ orthoradial et les invariances par rotation autour de cet axe et par translation le long de cet axe conduit à un champ ne dépendant que du rayon cylindrique r.



En appliquant le théorème d'Ampère :  $B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot I_{\text{enlacé}}$ .

Entre les deux conducteurs  $I_{\text{enlacé}} = I$ , d'où  $B(r) = \mu_0 I / (2\pi r)$  ;

à l'extérieur  $I_{\text{enlacé}} = 0$  donc  $B = 0$ .

### 5. Champ magnétique créé par un anneau épais :

1°) Vue la géométrie du problème, la densité de courant dans l'anneau ne va dépendre que du rayon x, et les lignes de courant sont orthoradiales :  $\vec{j} = j(x) \vec{e}_\theta$ .

On va expliciter j(x) en s'appuyant sur la loi d'Ohm. Sous forme macroscopique elle s'écrit :

$U = R \cdot I$  où U est la tension, circulation du champ électrique  $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} = \rho \vec{j}$  sur toute la

longueur du conducteur (c'est-à-dire ici le long d'un cercle de rayon x) et I est l'intensité,

correspondant au flux du vecteur densité de courant à travers une section du conducteur, d'épaisseur  $e$  et de largeur  $2a$  (entre les valeurs  $r-a$  et  $r+a$ ).

$$I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \int_{r-a}^{r+a} j(x) \cdot e \cdot dx$$

La circulation du champ électrique  $\vec{E} = \rho \vec{j}$  s'écrit, sur un cercle de rayon  $r-a < x < r+a$  :

$$U = \int \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int \rho j(x) e_{\theta} \cdot x \cdot d\theta e_{\theta} = 2\pi x \rho j(x)$$

$$\text{D'où : } j(x) = \frac{U}{2\pi \rho x} = \frac{K}{x}$$

$$\text{On peut alors calculer : } I = \int_{r-a}^{r+a} \frac{K}{x} \cdot e \cdot dx = Ke \cdot \ln \frac{r+a}{r-a} \quad \text{donc : } K = \frac{I}{e \cdot \ln \frac{r+a}{r-a}}$$

$$\text{soit finalement : } \vec{j} = j(x) \vec{e}_{\theta} = \frac{I}{xe \cdot \ln \frac{r+a}{r-a}} \vec{e}_{\theta}$$

2°) Chaque spire élémentaire d'épaisseur  $e$  et de largeur  $dx$  est parcourue par une intensité :  $dI = j(x) \cdot e \cdot dx$ .

Par la loi de Biot et Savart, chaque segment élémentaire de longueur  $x d\theta$  de chaque spire amène au centre du dispositif un terme de champ magnétostatique :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \frac{\vec{dl} \wedge \vec{e}_r}{x^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \frac{x d\theta}{x^2} \vec{e}_z$$

$$\text{que l'on intègre sur anneau de rayon } x : \vec{dB} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{dx}{x^2 \ln \frac{r+a}{r-a}} \vec{e}_z$$

puis l'on somme sur toutes les spires pour  $x$  variant de  $r-a$  à  $r+a$  :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{1}{\ln \frac{r+a}{r-a}} \left( \frac{1}{r-a} - \frac{1}{r+a} \right) \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{2} I \frac{1}{\ln \frac{r+a}{r-a}} \left( \frac{a}{r^2 - a^2} \right) \vec{e}_z$$

Pour  $2a \ll r$  :  $B \approx \mu_0 I / 2r$ , champ créé par une spire circulaire en son centre.

## 6. Champ magnétique créé par une sphère en rotation :

Ce problème déborde (un peu) du programme de sup. Il constitue une introduction aux distributions de courant non filiformes.

Une variation  $d\theta$  de l'angle de colatitude détermine une couronne sphérique de largeur  $R d\theta$ , de longueur  $2\pi R \sin\theta$ . Cette couronne est équivalente à une spire de courant du fait du mouvement de rotation de la sphère portant des charges fixes de densité surfacique  $\sigma$ .

Pour une durée  $dt$ , une section de largeur  $R d\theta$  est traversée par une quantité de charge  $\delta^2 Q = v R d\theta \sigma \cdot dt$  où  $v$  est la vitesse de rotation soit :  $v = R \sin\theta \cdot \omega$

Ceci correspond donc à une intensité  $dI$  pour cette spire élémentaire :  $dI = \sigma R^2 \sin\theta \omega d\theta$

Pour raison de symétrie, le champ créé par cette spire est porté par l'axe (Oz) de rotation.

En utilisant la loi de Biot et Savart, le terme de champ créé par un tronçon de spire élémentaire

$$\text{est : } \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \frac{\vec{dl} \wedge \vec{e}_r}{R^2}$$

On ne prend en compte que la projection sur l'axe (Oz), et l'on somme sur toute la spire :

$$d^2B_z \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} dI \frac{R \sin \theta d\varphi}{R^2} \sin \theta \vec{e}_z \quad \text{soit en sommant : } \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\sigma \omega R^3 \sin^3 \theta d\theta}{R^2} \vec{e}_z$$

En simplifiant et en sommant toutes les contributions des spires, c'est-à-dire en intégrant sur  $\theta$  de 0 à  $\pi$  :  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R \int \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z$  qui amène finalement :  $\vec{B} = 2 \frac{\mu_0}{3} \sigma \omega R \vec{e}_z$

### Approximation dipolaire :

#### 7. Spire carrée :

Calculons d'abord le champ magnétique créé par une portion de fil, traversée par un courant d'intensité  $I$  en un point de son plan médiateur.

Chaque élément de courant apporte, d'après le loi de Biot et Savart :  $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$

où  $d\vec{l} = dz \vec{u}_z$  avec  $z = r \cdot \tan \Psi$  et donc  $dz = r d\Psi / \cos^2 \Psi$  :  $PM = r / \cos \Psi$  :  
 $\vec{u}_{PM} = -\sin \Psi \vec{u}_z + \cos \Psi \vec{u}_r$  ce qui mène à :  $\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \cos \Psi d\Psi \vec{u}_\theta$  (voir calcul identique fait en cours).

Par intégration :  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} 2 \sin \psi_0 \vec{u}_\theta$  où  $\Psi_0$  est l'angle sous lequel on voit le demi-segment depuis le point M considéré. On a  $\sin \psi_0 = \frac{a/2}{\sqrt{r^2 + a^2/4}}$  avec  $r^2 = x^2 + a^2/4$ .

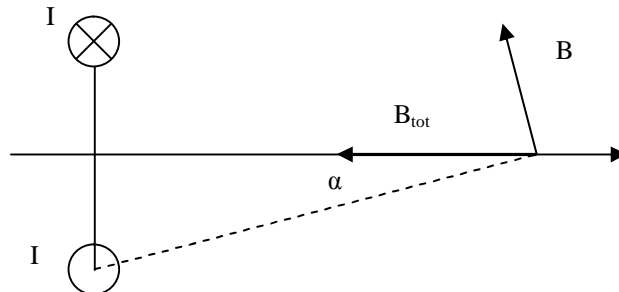
Une spire parcourue par un courant d'intensité  $I$  a la forme d'un carré de côté  $a$ . L'axe (Ox) est un axe d'antisymétrie pour cette spire. Il portera donc le champ total créé par la spire.

On somme donc les 4 termes de champ créés par les quatre segments en ne tenant compte que de leur projection sur (Ox).

$$\vec{B}_{tot} = -4B \sin \alpha \vec{e}_x$$

avec

$$\sin \alpha = \frac{a/2}{r} = \frac{a/2}{\sqrt{x^2 + a^2/4}}$$



Il vient finalement :  $\vec{B}_{tot} = \frac{-\mu_0}{2\pi} \frac{Ia^2}{\sqrt{x^2 + a^2/2} (x^2 + a^2/4)} \vec{u}_x$

Lorsque  $x$  devient grand devant  $a$ , on retrouve l'expression du champ créé par un dipôle magnétique, de moment dipolaire  $Ia^2$  :

En effet, on a alors :  $\vec{B}_{tot} = \frac{-\mu_0}{2\pi} \frac{Ia^2}{x^3} \vec{u}_x$

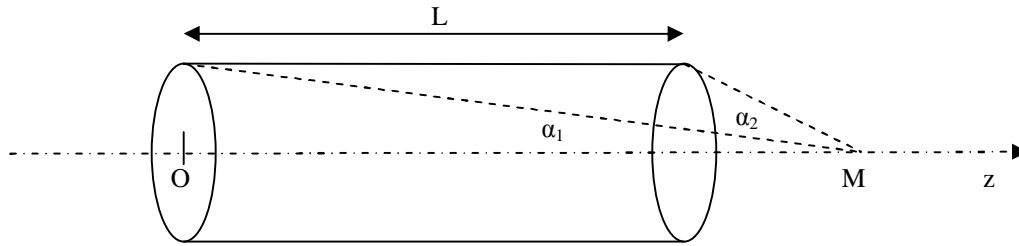
On compare à l'expression:  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left( 3 \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{M} \right)$  expression intrinsèque du champ créé

par un dipôle, qui mène, sur l'axe du dipôle à  $B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M}{x^3}$

Par identification, on obtient pour moment magnétique :  $M = Ia^2$ , ce qui correspond bien au moment magnétique de la spire carrée.

## 8. Solénoïde vu à grande distance :

1°)



Le calcul a été traité en cours (au programme de sup PCSI). On considère le solénoïde comme une juxtaposition de spires circulaire d'épaisseur  $dz$ , et l'on paramètre le problème par l'angle  $\alpha$  sous lequel on voit chaque spire depuis M. Le calcul du champ créé par une spire unique sur son axe a lui-même été traité en cours (au programme de sup PCSI).

On intègre entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  correspondant aux deux faces du solénoïde.

D'où :  $B(z) = \frac{\mu_0 NI}{2L} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$  soit en introduisant la variable  $z = OM$  où O est placé

aux centre de la première face du solénoïde, avec  $\cos \alpha_1 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$  et

$$\cos \alpha_2 = \frac{z-L}{\sqrt{a^2 + (z-L)^2}}, \text{ il vient : } B(z) = \frac{\mu_0 NI}{2L} \left( \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{a^2 + (z-L)^2}} \right)$$

2°) En s'éloignant du solénoïde, on a  $z \gg a$  et  $z \gg l$ . Par un développement limité en  $a/z$ , la partie principale de  $B(z)$  va s'exprimer de façon approchée.

$$\text{avec } \cos \alpha_1 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \approx 1 - \frac{a^2}{2z^2} \text{ et } \cos \alpha_2 = \frac{z-L}{\sqrt{a^2 + (z-L)^2}} \approx 1 - \frac{a^2}{2(z-L)^2} \approx 1 - \frac{a^2}{z^2} - \frac{a^2 L}{z^3}$$

$$\text{on tire : } B(z) = \frac{\mu_0 NI}{2} \frac{a^2}{z^3}$$

On compare au modèle du dipôle magnétique, donc en se référant à l'expression intrinsèque du champ créé par un dipôle  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left( 3 \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{M} \right)$  qui amène, sur l'axe du dipôle, un

champ d'expression :  $B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M}{z^3}$  où M est le moment magnétique du dipôle.

Par identification, on obtient pour moment magnétique :  $M = NI\pi a^2$ , ce qui correspond bien à la somme des N moments magnétiques de chacune des spires ciculaires de rayon a.

