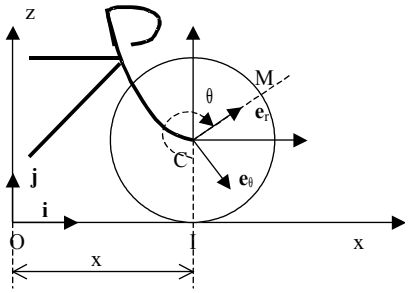
CINEMATIQUE

1. Roue de vélo :



Un vélo roule sur une route horizontale, à la vitesse constante v_o
On examine le mouvement d'un point M périphérique d'une des roue, par rapport au sol. La roue est de centre C, de rayon R connu. On note I le point de contact de la roue sur la route.
a) Exprimer la vitesse de M par rapport au sol, dans la base polaire $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}\right)$ et dans la base cartésienne $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$.
b) Pour que la roue ne dérape pas, il faut que la vitesse de tout point M de la bande de roulement du pneu soit nulle lorsqu'il vient en contact avec le sol (en I).
Donner la relation nécessaire entre v_o et $\omega = \dot{\theta}$ dite condition de non glissement.
c) Tracer l'allure de la trajectoire de M.
d) Calculer l'accélération de M.

2. Accélération subie dans un mouvement de rotation à vitesse constante.

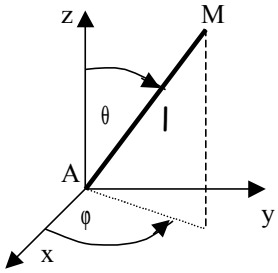
a) Calculer numériquement l'accélération subie par un pilote de chasse lorsque son avion effectue un virage de 1000 m de rayon, à Mach 1 (soit $1{,}06.10^3$ km.h^{-1}).
b) Calculer l'accélération et la vitesse correpondant au mouvement d'un point M de la surface terrestre, de latitude λ vu dans le référentiel géocentrique (la latitude est l'angle que fait le rayon OM reliant M au centre O de la Terre avec le plan équatorial). La Terre fait 1 tour par jour sidéral (86164 s) dans ce référentiel. Application numérique pour un point de l'équateur. Le rayon terrestre vaut $6{,}4.10^3$ km.
R : a) $a = 86{,}7\ m.s^{-2} \approx 9\ g$ ($g = 9{,}81\ m.s^{-2}$). b) $a = 3{,}4.10^{-2}\ m.s^{-2}$.

3. Mouvement hélicoïdal :

Le mouvement d'une particule M est défini en coordonnées cylindriques, (r, θ, z).
par les équations paramétrées suivantes : $r = R$; $\theta = \omega t$; $z = a t$ où R, ω et a sont des constantes et t est le temps.La trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre circulaire.
Le pas h de cette hélice est par définition la distance séparant deux positions successives du mobile sur une même génératrice.Etablir la relation entre a et h.
Déterminer le vecteur vitesse. Montrer qu'il fait un angle α constant avec l'axe (Oz).Calculer tanα .
Déterminer le vecteur accélération. Le mouvement est-il uniforme ? Exprimer la distance s parcourue par le mobile sur sa trajectoire en fonction du temps.

R : $a = \omega h / 2\pi$; $\vec{v} = R\omega\,\vec{e_\theta} + \frac{\omega h}{2\pi}\vec{e_z}$; $\tan\alpha = 2\pi R/h$; $\vec{\gamma} = -R\omega^2\vec{e_z}$; de $\left\|\vec{v}\right\| = \frac{ds}{dt}$: $s = \omega t\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$

4. barre liée par une rotule :

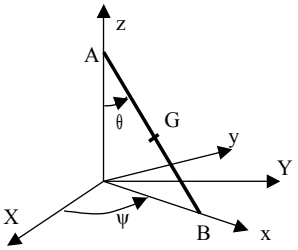


Une barre est fixée à une rotule à l'une de ses extrémité A, lui permettant toute rotation en ce point. Sa position est repérée par les angles θ et φ.
Calculer la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{\gamma}$ de M dans les cas particuliers suivants :

a) le mouvement de M a lieu dans un plan vertical (à φ fixé) ; on explicitera les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ dans la base polaire $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}\right)$ puis dans la base cartésienne.

b) le mouvement de M a lieu selon un plan horizontal (à θ fixé). on explicitera de même les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ dans la base sphérique $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}\right)$ puis dans la base cartésienne.

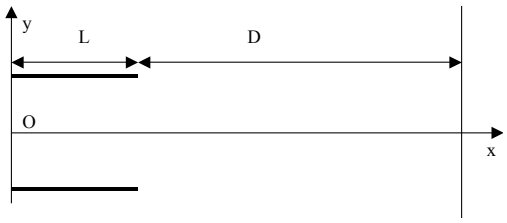
5. Mouvement du milieu d'une barre :



On considère une barre AB, de longueur 2a, de milieu G. A se déplace sur l'axe (Oz) vertical tandis que B se déplace dans le plan horizontal (xOy).

Ecrire les vecteurs position $\overrightarrow{OG}$ et vitesse $\vec{v}_G$ dans la base cartésienne $\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$. Quelle est la nature de la trajectoire décrite par G dans l'espace pour un observateur lié au référentiel (O,x,y,z) ?
Expliciter la base $\left(\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ dans la base cartésienne $\left(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right)$. Exprimer le vecteur vitesse de G, noté $\vec{v}_G$, dans la base cartésienne $\left(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z}\right)$ ainsi que son module, en fonction des angles θ et ψ.

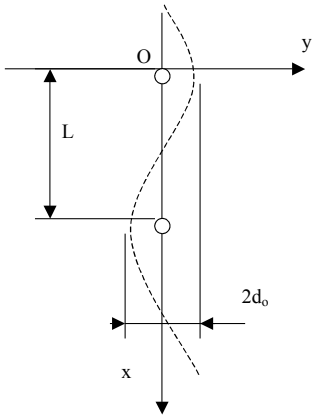
6. Tube cathodique :



Une particule de charge q (électron) pénètre en O (x = 0, y = 0) avec une vitesse initiale $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_x$ dans l'espace situé entre deux plaques conductrices soumises à une tension U. Il subit alors une force électrostatique constante de module F = qU/d où d est la distance entre les plaques, dirigée selon $\vec{e}_y$.

Cette force lui impose donc une accélération $\frac{\vec{F}}{m} = \frac{qU}{md}\vec{e}_y$ tant que la particule circule entre les plaques, de longueur L. La pesanteur joue un rôle négligeable dans ce problème.
Déterminer la vitesse $\vec{v}_S$ et la position S de sortie des plaques. Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire (OS) est celle d'une parabole.
Un écran est disposé à une distance D de la sortie des plaques. Quelles seront les coordonnées du spot P correspondant à l'impact de l'électron sur l'écran ?
R : $\overrightarrow{OS} = L\,\vec{e}_x + (L/v_o)^2.\,qU/(2m.d)\,\vec{e}_y$; $\vec{v}_S = v_o\,\vec{e}_x + (L/v_o).\,qU/(m.d)\,\vec{e}_y$;
$y_P = y_S + (DL/v_o^2).\,qU/(m.d)$.

7. Test de stabilité d'une automobile :



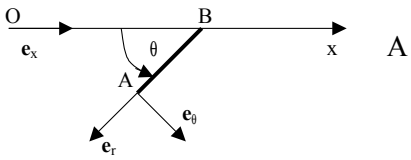
Lors d'un tel test, la voiture, repérée par son centre de gravité G de coordonnées (x, y), est astreinte à suivre une trajectoire sinusoïdale sur une piste horizontale en slalomant entre des plots espacés d'une distance L, de manière à conserver à tout moment une vitesse $\dot{x} = v_o = 50$ km.h^{-1}.
Durant le mouvement, la distance minimale entre G et chaque plot est $d_o = 3{,}0$ m.

1°) Montrer que l'équation y(x) = A.cos(B.x) convient pour décrire la trajectoire et déterminer les valeurs de A et B.

2°) La voiture testée doit tolérer une accélération maximale de 0,7 g (g = 9,8m.s^{-2}). Avec quel espacement L doit-on disposer les plots ?

R : Exprimer vitesse et accélération dans la base ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$) *: (penser aux dérivations composées)*
$\vec{v} = v_o\,\vec{e}_x - (\pi/L)\,v_o.d_o\sin(\pi x/L)\,\vec{e}_y$; $\vec{\gamma} = -(\pi^2/L^2)v_o^2.d_o\cos(\pi x/L)\,\vec{e}_y$. ; *Il faut* $L > \pi v_o(d_o/0{,}7g)^{1/2}$.

8. Mouvement d'une remorque :



Une remorque, repérée par le point A, est tirée par une voiture (point B). La voiture roule à vitesse constante $\vec{v}_o = v_o\vec{e}_x$ et la liaison entre et B implique que le point A se déplace à tout instant selon la direction (AB) avec AB = L.
Montrer que : $\vec{v}_A = v_o\vec{e}_x + L\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$ .En déduire une relation différentielle entre t et θ , puis exprimer θ en fonction de t. On donne : $\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$

R : $\theta = 2.\mathrm{atan}(\exp(-v_o t/L))$.