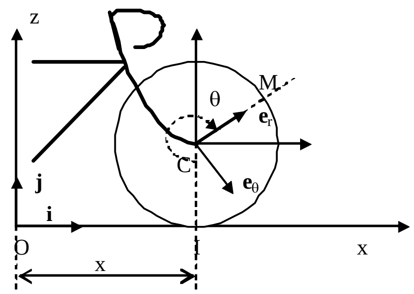
CINEMATIQUE (corrigé)

1. Roue de vélo :

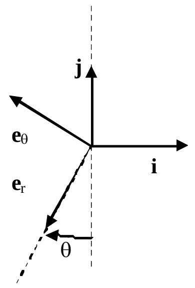


a) Décomposons le vecteur position :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM} = x\vec{i} + R\vec{j} + R\overrightarrow{e_r}$ (1)

On peut projeter le vecteur unitaire radial sur la base cartésienne :

$$\overrightarrow{e_r} = -\sin\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}$$



donc :

$$\overrightarrow{OM} = (x - R\sin\theta)\vec{i} + R(1-\cos\theta)\vec{j}$$

On obtient alors la vitesse par dérivation temporelle (la base cartésienne est invariante) :

$$\vec{V} = (v_o - R\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{j}$$

on peut aussi procéder directement en dérivant (1) en tenant compte du caractère variable des vecteurs de la base polaire :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

On tire : $\vec{V} == v_o\vec{i} + R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ (2)

Ce qui conduit au même résultat, explicité sur la base cartésienne, en employant : $\overrightarrow{e_\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

Le vecteur vitesse peut aussi s'expliciter complètement dans la base polaire, en partant de (2) et en projetant l'unitaire de la base cartésienne selon : $\vec{i} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} - \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$

b) il suffit d'écrire que la vitesse du point M va s'annuler quand M passe en I, c'est-à-dire pour θ = 0 modulo π, car le support a une vitesse nulle au point de contact I. (On ne veut pas de vitesse relative entre la roue et le support en I).

Ceci conduit à :

$$\dot{\theta} = \omega = v_o/R$$

c) Faire un tracé point par point en prenant des valeurs particulières de θ, à partir de l'expression du vecteur position. On obtient une cycloïde.

d) L'accélération s'obtient par une dérivation temporelle du vecteur vitesse :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -R\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{i} - R\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{j} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$$

en tenant compte que la vitesse angulaire est constante :

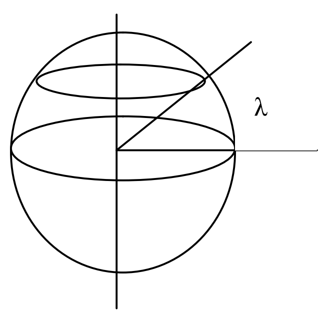
$$\dot{\theta} = \omega = v_o/R = \ cste$$

On retrouve l'expression de l'accélération pour un mouvement circulaire uniforme. le mouvement de translation du vélo, qui est à vitesse constante, n'introduit pas de terme d'accélération pour M.

2. Accélération subie en mouvement de rotation uniforme.

a) $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} == -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}$ avec $\dot{\theta} = \omega = v_o/R = \ cste$

Numériquement : v_o = 1060 km.h^{-1} = 294,4 m/s donc en norme : γ = 86,70 m.s^{-2} (soit 86,70/9,8 ≈ 8,8 g)



b) Le mouvement dans le référentiel géocentrique est circulaire, selon un cercle situé dans le plan orthogonal à l'axe de rotation terrestre, dont la position et le rayon dépendent de la latitude λ.

Le rayon de la trajectoire vaut : R.cosλ où R est le rayon de la Terre.

La vitesse angulaire de rotation terrestre est ω = 2π/T avec T = 86164 s.

d'où numériquement : γ = R.ω² = 3,4.10^{-2} m.s^{-2}.

3. Mouvement hélicoïdal .

Dans la base cylindrique, à partir des coordonnées de position : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z} = R\omega\vec{e_\theta} + \dfrac{\omega h}{2\pi}\vec{e_z}$

L'angle α du vecteur vitesse avec l'axe (Oz) a pour tangente le rapport de sa coordonnée orthoradiale avec sa coordonnée axiale, soit : $\tan\alpha = 2\pi R/h$.
Le pas de l'hélice correspond à la dénivellation subie par le mobile sur un tour d'hélice. Soit à la variation Δz pour une variation $\Delta\theta = 2\pi$ de l'angle θ. Soit pour un intervalle de temps $T = 2\pi/\omega$; donc $h = a.T = 2\pi a/\omega$ d'où finalement : $a = \omega h/2\pi$.

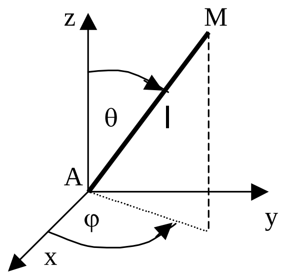
Le vecteur-accélération se calcule par dérivation temporelle du vecteur-vitesse : $\vec{\gamma} = -R\omega^2\vec{e_r}$

Ce vecteur-accélération apparaît orthogonal au vecteur-vitesse. Le mouvement sera donc uniforme puisque

$$\vec{\gamma}.\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{v}^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\left\|\vec{v}\right\|^2}{dt}$$

Par définition : $\left\|\vec{v}\right\| = \dfrac{ds}{dt}$, en intégrant cette relation : $s(t) = \omega t\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}$

4. Barre liée par une rotule.



a) L'étude se restreint donc à un mouvement plan, en coordonnées polaires (r, θ), où r = L (longueur de la barre). On retrouve le cas étudié en cours du mouvement circulaire.

Vecteur position : $\overrightarrow{AM} = L\vec{e_r}$; vecteur vitesse : $\vec{v} = Ld\vec{e_r}/dt = L\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ car dL/dt = 0

Vecteur accélération : $\vec{\gamma} = -L\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + L\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

Pour expliciter ces vecteurs sur la base cartésienne, il suffit de projeter la base polaire $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}\right)$ dans la base cartésienne $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$, soit en notant en vecteurs colonnes : $\vec{e_r} = \begin{vmatrix} \sin\theta.\cos\varphi \\ \sin\theta.\sin\varphi \\ \cos\theta \end{vmatrix}$

et $\vec{e_\theta} = \begin{vmatrix} \cos\theta.\cos\varphi \\ \cos\theta.\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{vmatrix}$

Pour obtenir ces résultats, décomposer le vecteur $\vec{e_r} = \cos\theta\vec{e_z} + \sin\theta\vec{u}$ où le vecteur $\vec{u}$ est dans le plan (Oxy). Le vecteur $\vec{u}$ se projette à son tour sur la base $\left(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\right)$ selon : $\vec{u} = \cos\varphi\vec{e_x} + \sin\varphi\vec{e_y}$.

De même : $\vec{e_\theta} = -\sin\theta\vec{e_z} + \cos\theta\vec{u}$

b) Le mouvement a lieu cette fois dans un plan horizontal (c'est à dire orthogonal à (Oz)), à θ = cste.
Définissons une base polaire $\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}\right)$ dans ce plan, où ρ est le rayon cylindrique : $\rho = r.\sin\theta = L.\sin\theta$.

$\vec{e_\varphi}$ est l'unitaire correspondant à l'angle φ, tangent à la trajectoire du mobile, qui décrit un cercle de rayon $L.\sin\theta$ centré sur l'axe (Oz).

Les vecteurs du mouvement (position, vitesse et accélération) s'exprimeront sur la base cylindro-polaire $\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z}\right)$

Vecteur position : $\overrightarrow{AM} = L\sin\theta\vec{e_\rho} + L\cos\theta\vec{e_z}$;

vecteur vitesse : $\vec{v} = L\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$ car $L\cos\theta\vec{e_z}$ = cste ;

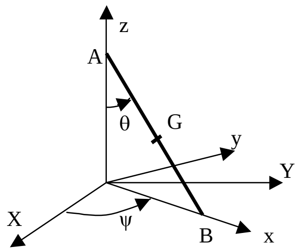
vecteur accélération : $\vec{\gamma} = L\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} - L\sin\theta\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e_\rho}$.

La projection de la base $\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z}\right)$ sur la base cartésienne $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ permet d'exprimer tous les vecteurs dans cette dernière base.

$$\overrightarrow{e_\rho} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_\varphi} = \begin{vmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le mouvement étant horizontal, on remarque sans surprise que le vecteur vitesse et le vecteur accélération ne comportent pas de termes verticaux…

5. Mouvement du milieu d'une barre :



AGO est à tout instant un triangle isocèle, dont l'angle (GAO) = (AOG) = θ.
Ce triangle étant isocèle, on a OG = GA = a. G parcourt un cercle de centre O et de rayon a.
On peut projeter le vecteur position sur la base cartésienne $\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$:

$$\overrightarrow{OG} = a\sin\theta\,\vec{x} + a\cos\theta\,\vec{z}$$

En dérivant dans le temps, avec θ pour seule grandeur dépendant du temps :

$$\vec{v} = a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{x} - a\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{z}$$

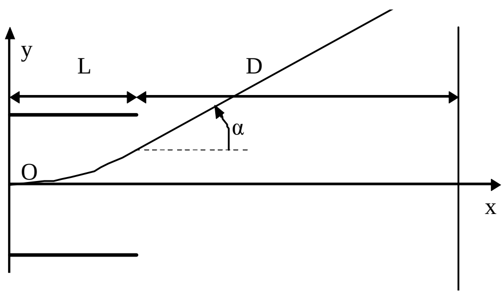
La vitesse a pour module : v = a$\dot{\theta}$.

Pour expliciter dans la base cartésienne "fixe" $\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right)$, il suffit de projeter la base $\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ sur la base $\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}\right)$:

$$\vec{x} = \begin{vmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{y} = \begin{vmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{vmatrix} \; ; \; \vec{z} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

6. Tube cathodique :

Connaissant l'accélération, on peut intégrer par rapport au temps et en déduire la vitesse. Le calcul d'intégration se conduit indépendamment sur chaque coordonnées, en tenant compte des conditions initiales du mouvement : $\dfrac{\vec{F}}{m} = \vec{\gamma} = \dfrac{qU}{md}\overrightarrow{e_y}$



donne $\vec{v}$ = $v_o\,\overrightarrow{e_x}$ + qU.t /(m.d) $\overrightarrow{e_y}$ (à t = 0 : $\vec{v}$ = $v_o\,\overrightarrow{e_x}$).

Une seconde intégration amène le vecteur position, avec la condition initiale $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0}$:

$\overrightarrow{OM}$ = $v_o.t\,\overrightarrow{e_x}$ + $qU.t^2/(2m.d)\,\overrightarrow{e_y}$

L'équation paramétrée par le temps t de cette trajectoire est : {x = v_ot ; y = $qU.t^2/(2m.d)$} ;

en éliminant la variable t entre les deux équations il vient : $y = (qU/2md)(x/v_o)^2$ équation d'une parabole de sommet O(0, 0).

Le point de sortie de la région située entre les plaques, S, est obtenu en consdérant qu'en S : x_S = L.
Donc S est atteint à l'intant t_S = L/vo, d'où la position de S : $\overrightarrow{OS}$ = L $\overrightarrow{e_x}$ + $(L/v_o)^2$. qU/(2m.d) $\overrightarrow{e_y}$

ainsi que le vecteur vitesse en sortie : $\overrightarrow{v_S}$ = $v_o\,\overrightarrow{e_x}$ + (L/v_o). qU/(m.d) $\overrightarrow{e_y}$;

Au delà des plaques, la particule ne subissant plus d'interaction, son accélération s'annule. Sa vitesse va donc ensuite se conserver et rester à la valeur de sortie $\overrightarrow{v_S}$ (principe d'inertie).

On en déduit les coordonnées du point P, spot à l'écran : x_P = L + D (évidemment) .

Calculons la pente de la trajectoire donnée par le rapport des coordonnées de la vitesse entre S et P :
$v_{Sy} / v_{Sx} = (L/v_o^2).\ qU/(m.d)$.

L'écart entre y_S et y_P vaut $D.(v_{Sy} / v_{Sx})$. (tracer un schéma si besoin…).
ce qui amène pour y_P : $y_P = y_S + (DL/v_o^2).\ qU/(m.d)$.

7. Test de stabilité d'une automobile :
Lors d'un tel test, la voiture, repérée par son centre de gravité G de coordonnées (x, y), est astreinte à suivre une trajectoire sinusoïdale sur une piste horizontale en slalomant entre des plots espacés d'une distance L, de manière à conserver à tout moment une vitesse $\dot{x} = v_o = 50\ km.h^{-1}$.

Durant le mouvement, la distance minimale entre G et chaque plot est $d_o = 3$ m.

1°) L'équation $y(x) = A.\cos(B.x)$ doit mettre en jeu des constantes A et B telles que notamment : $y(0) = d_o$ et $y(L) = -d_o$. A correspond à l'amplitude de variation de y(x) donc $A = d_o$. B doit être tel que $y(x+2L) = y(x)$ soit donc $\cos(Bx + 2L.B) = \cos(Bx)$ ce qui implique : $2\pi L = 2L.B$. On tire $B = \pi/L$.

2°) La voiture testée doit tolérer une accélération maximale de 0,7 g ($g = 9{,}8 m.s^{-2}$). Avec quel espacement L doit-on disposer les plots ?

Exprimons vitesse et accélération dans la base ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$) en pensant aux dérivations composées.
$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$ avec $x(t) = v_o.t$ et donc $\dot{x} = v_o$.
Concernant la coordonnée y, elle n'est pas explicitement dépendante du temps t : y(x) avec x(t).
Par dérivation composée : $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}v_o$

$\vec{v} = v_o\vec{e}_x - (\pi / L)\ v_o.d_o\sin(\pi x / L)\vec{e}_y$

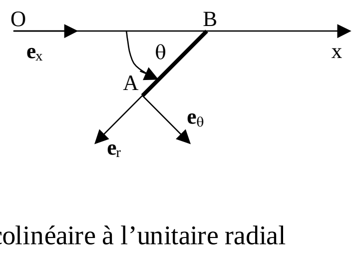
En procédant de même : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_o\vec{e}_x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-(\pi / L)\ v_o.d_o\sin(\pi x / L)\vec{e}_y\right)\frac{\partial x}{\partial t}$

soit $\vec{\gamma} == -(\pi^2 / L^2)v_o{}^2.d_o\cos(\pi x / L)$

Il faut avoir un module de l'accélération qui reste inférieur à 0,7 g. Il faut donc majorer la fonction
$\left|(\pi^2 / L^2)v_o{}^2.d_o\cos(\pi x / L)\right|$ avec $|\cos(\pi x/L)|$ majoré par 1. On tire : $L > \pi v_o(d_o/0{,}7g)^{1/2}$.

8. Mouvement d'une remorque :

L'idée directrice de l'exercice est de s'appuyer sur le fait que la vitesse de A doit rester colinéaire à $\vec{e_r}$.



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = x\overrightarrow{e_x} + l\overrightarrow{e_r}$ dont on tire par dérivation temporelle :

$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}\right) = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

soit : $\vec{v} = v_o\overrightarrow{e_x} + l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

Remarque : $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$ ne constitue pas une base orthogonale : le fait que la vitesse de A reste colinéaire à l'unitaire radial n'implique donc pas d'avoir $l\dot{\theta} = 0$

La colinéarité de la vitesse avec l'unitaire radial se traduit aussi par l'orthogonalité entre la vitesse et l'unitaire orthoradial.
$\vec{v}.\overrightarrow{e_\theta} = \left(v_o\overrightarrow{e_x} + l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right).\overrightarrow{e_\theta} = 0$ ce qui amène : $v_o\sin\theta = -l\dot{\theta}$ soit : $\frac{d\theta}{\sin\theta} = -\frac{v_o}{l}dt$

d'où finalement : $\theta = 2.\mathrm{atan}(\exp(-v_o t/L))$.