THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE, ENERGIE POTENTIELLE, ENERGIE MECANIQUE.

Un peu de méthode !

Deux façons d'écrire le théorème de l'Energie cinétique existe (c'est à dire deux façons de relier les variations de l'énergie cinétique aux échanges énergétiques existant entre le système mécanique et l'extérieur) : sous forme différentielle ou sous forme intégrale :

- L'écriture différentielle correspond au Théorème de la Puissance Cinétique : $dEc/dt = \Sigma P(t)$. Elle donne accès à l'équation du mouvement dans le cas de mouvements à un degré de liberté. En calculant la somme des puissances instantanées reçues par le système, on projette de fait les forces sur la direction de la vitesse intantanée du mobile. Cette démarche amène donc automatiquement à projeter la R.F.D sur la direction « pertinente », celle qui conditionne le mouvement du système.
- L'écriture intégrale sera utilisée pour toutes les situations où se dégage un état initial et un état final du système. L'écriture $\Delta Ec = \Sigma W$ se présente en effet comme un bilan énergétique entre deux états mécaniques du système, l'état initial, de vitesse v_i en une position M_i et l'état finale vitesse v_f et de position M_f. Remarquons cependant que l'état final du système peut être un état correspondant à une phase quelconque du mouvement, de vitesse v, si l'on souhaite relier les évolutions de la vitesse du mobile aux conditions initiales du mouvement.

Dans le cas de forces conservatives, l'introduction d'une énergie potentielle par $W = -\Delta Ep$ est possible. Le bilan énergétique s'écrit alors : $\Delta E = \Delta Ec + \Delta Ec = W_{non\ cons}$. (voir exercice 3). Il faut définir avec attention les états initial et final du problème, conditionnant les valeurs de Ec et Ep dans ces états.

Dans le cas de systèmes conservatifs (où toutes les forces sont conservatives), l'énergie mécanique Eest une constante du mouvement.

Insistons sur le cas particulier, mais souvent étudié, des systèmes conservatifs à un degré de liberté. L'équation traduisant la conservation de E donne alors accès à l'équation du mouvement, en la dérivant par rapport au temps, pourvu que l'on ait explicité préalablement tous ses termes en fonction d'une seule variable de position.

La conservation de E, associée à la condition $Ec \geq 0$ amène $E \geq Ep$. Cette condition limite alors les domaines accessibles au système (barrière de potentiel, puits de potentiel), selon les conditions initiales, fixant la valur de E.

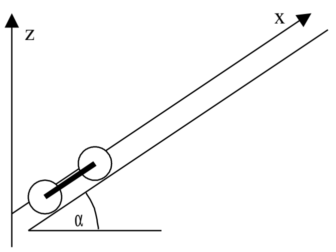
Toujours pour les systèmes conservatifs à un degré de liberté, il est possible d'étudier les positions d'équilibre du système et leur stabilité à partir de la fonction énergie potentielle. Les positions d'équilibre correspondent aux extréma de Ep, elles sont instables en les positions de maximum de Ep et stables en les positions de minimum de Ep.

La notion de potentiel harmonique est un point essentiel du cours de Sup. Un système conservatif évoluant au voisinage d'une position d'équilibre stable va se comporter comme un oscillateur harmonique. Pour un système conservatif à un degré de liberté, l'étude classique consiste à réaliser un développement limité au deuxième ordre de la fonction Ep(x) au voisinage de $x = x_{éq}$. L'équation de conservation de l'énergie mécanique mène, en la dérivant par rapport au temps,à une équation différentielle de forme : $\ddot{x} + \frac{1}{m}\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{x=xéq}\left(x - x_{éq}\right) = 0$. La solution x(t) correspond à des oscillations sinusoïdales autour de la position d'équilibre, avec une pulsation : $\omega = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{x=xéq}}$

.

Le développement de Ep(x) au deuxième ordre est équivalent à un développement limité de la force exercée sur le système au premier ordre au voisinange de l'équilibre stable. La force de rappel vers la position d'équilibre est alors linéarisée. (voir ex. 5 et 6).

EXERCICES DE MECANIQUE : THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE, ENERGIE POTENTIELLE, ENERGIE MECANIQUE.



1. Un chariot lesté, de masse m, est propulsé sur une rampe faisant un angle α avec l'horizontal. Il est lancé au point A avec une vitesse v_o. Le déplacement se fait avec un frottement solide de coefficient f.

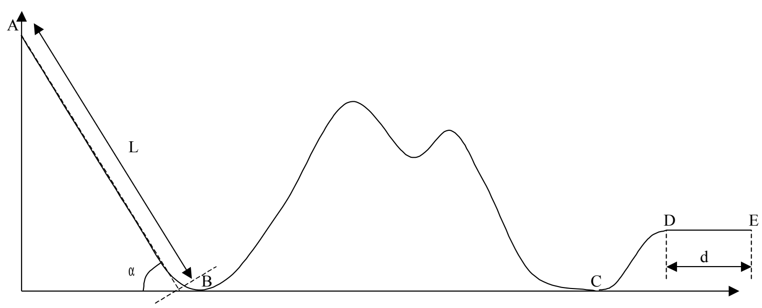
a) Calculer le travail du poids et du frottement en fonction de l'abscisse x du chariot. En déduire l'altitude maximale z_{max} atteinte par le théorème de l'énergie cinétique.

b) Retrouver la valeur de z_{max} en écrivant la variation de l'énergie mécanique.

R : a) $W = -mg.x.\sin\alpha - fmg.\cos\alpha.x$; $z_{max} = (\sin\alpha.v_o^2/2)/(g(\sin\alpha + f.\cos\alpha))$. b) $\Delta E = -fmg.\cos\alpha.x_{max}$, d'où $z_{max} = x_{max}\sin\alpha$.

2. a) Un wagon de montagne russe est hissé à une altitude h puis lâché sans vitesse initiale en A sur une portion de piste descendante de longueur L et inclinée d'un angle α où il roule sans frottement.

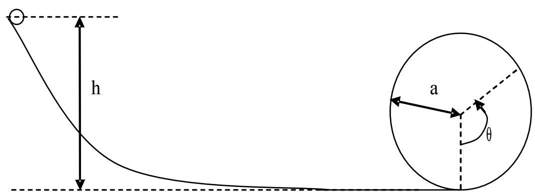
Calculer la vitesse v_o qu'il atteint lorsqu'il est redescendu à l'altitude z = 0 au point B. On donne $\alpha = 35°$, L = 40 m, g = 9,8 $m.s^{-2}$.



b) En fin de parcours, le wagon doit être freiné jusqu'à son arrêt complet au point E. Pour cela , le wagon finit sa course en suivant la rampe (CD), subissant une dénivelée Δh, puis une portion horizontale (DE) de longueur d où il subit une force de frottement constant de module F. Evaluer l'accélération subie par les passagers sur la dernière section. On donne Δh = 3 m, d = 5 m. On estime que durant les évolutions intermédiaires du véhicule, soit entre B et C, qui se trouvent à la même altitude, il a perdu 30 % de son énergie mécanique du fait des frottements.

R : $v_o = (2gL\sin\alpha)^{1/2}$; énergie mécanique en D : $E_D = 0{,}7(mv_o^2/2) - mg\Delta h$; $E_D = F.d$.

3. Une particule matérielle de masse m glisse sans frottement dans une gouttière terminée par une boucle circulaire de rayon a. Calculer la valeur minimale de l'altitude initiale, comptée à partir de la base de la boucle circulaire, pour que la particule abandonnée sans vitesse initiale suive intégralement la boucle circulaire et reste en contact tout au long du trajet.



R : Ecrire la cons° de E d'où $v(\theta)$. La RFD donne la réaction N du support. N ne doit pas s'annuler même à $\theta = \pi$. $h_{min} = 5a/2$

4. Energie de recul.

1°) Un canon au repos, de masse M, tire horizontalement un obus de masse m (m < M) avec une vitesse initiale v_O .

En écrivant la conservation de la somme des quantités de mouvement du canon et de l'obus, relier la vitesse de recul du canon v_c à v_O.

Comparer l'énergie cinétique de l'obus à la sortie du canon à l'énergie cinétique de recul du canon.

2°) a) pour limiter la course de recul du canon à une distance maximale d, on utilise un système hydraulique qui, en première approximation, peut être assimilé à un ressort de raideur k, dont l'une des extrémités est fixe, et l'autre fixée au canon. La force exercée par le ressort est **F** = - k **x**, **x** étant l'élongation du ressort.

Quelle doit être la valeur minimale k_m de k en fonction de v_0, m, M et d ?

b) En réalité, un frottement visqueux absorbe une partie ω de l'énergie cinétique de recul du canon. Calculer la distance maximale de recul d' (on prendra $k = k_m$). Comparer d et d'.

3°) application numérique : v_0 = 2160 km/h ; M = 800 kg ; m = 2 kg ; d = 1 m ; ω = 450 J. Calculer l'énergie cinétique du canon, celle de l'obus, la raideur limite k_m du ressort et la distance d'.

R : 1°) $-M.v_c + m.v_O = 0$. $Ec_O/Ec = M/m$. ; 2°) a) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique. $k_m = m^2 v_O^2 / Md^2$

$$d' = d\sqrt{1 - \frac{2\omega}{k_m d^2}}$$ *.b) $\Delta E = -\omega$ puis on tire :*

5. Chute hélicoïdale :

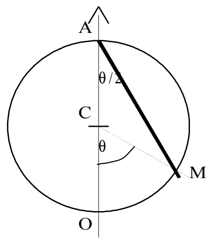
Les équations en coordonnées cylindro-polaires d'une courbe hélicoïdale d'axe (Oz) vertical ascendant'écrivent : $\{r = a \ ; z = -h.\theta + H\}$ où a, h et H sont des constantes. θ est l'angle polaire, défini ici dans le sens du mouvement.
Un colis glisse sans frottement dans un gouttière hélicoïdale, après avoir été abandonné sans vitesse initiale au point d'altitude $H = 2\pi h$. En assimilant cet objet à un point matériel astreint à suivre la courbe décrite par les équations précédentes, écrire le théorème de l'énergie cinétique et établir la relation : $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}}.\sqrt{2\pi - \theta}$
En déduire la durée totale du mouvement amenant le colis de l'altitude initiale z = H à l'altitude z = 0.

R : TEC : $\Delta E_c = W$ avec $\Delta E_c = mv^2/2$ et $W = mgh(2\pi - \theta)$ avec : $\vec{v} = a\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} - h\dot{\theta}\,\vec{k}$; d'où la relation demandée (θ croissant donc dθ/dt > 0). On explicite : $dt = \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh}}.\frac{d\theta}{\sqrt{2\pi - \theta}}$

d'où par intégration : $\Delta t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh}}.\frac{d\theta}{\sqrt{2\pi - \theta}} = \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh}}.\left[-2\sqrt{2\pi - \theta}\right]_0^{2\pi}$

soit finalement : $\Delta t = 2\sqrt{\frac{\pi\left(a^2 + h^2\right)}{gh}}$

6. Pendule à ressort :



On assimile à un point matériel M de masse m un petit anneau susceptible de coulisser sans frottement le long d'un cercle fixe de centre O et de rayon a contenu dans un plan vertical.
Un élastique lié à l'anneau, de longueur à vide L_o et de raideur k coulisse sans frottement dans un orifice situé au sommet A du cerceau. L'autre extrémité de l'élastique étant liée à un point fixe A_o tel que $A_oA = L_o$, l'allongement de l'élastique est donc égal à la distance AM.
On souhaite déterminer les positions d'équilibre possible du système et leur stabilité.

1°) *Etude par une méthode dynamique* : Ecrire la Relation Fondamentale de la Dynamique. Expliciter cette relation en projection selon la direction orthoradiale. En déduire différents cas selon la valeurs de la constante de raideur.
2°) *Etude par une méthode énergétique* : Exprimer l'énergie potentielle U du système. Etudier la fonction U(θ) et tracer l'allure du profil d'énergie potentielle dans chacun des cas. Interpréter ces courbes et confronter ces résultats à ceux obtenus en (1°).
3°) Dans le cas où O (θ = 0) est une position d'équilibre stable, on pose $k = \alpha mg/a$ (avec $0 < \alpha < 1$). Déduire de considérations énergétiques l'équation du mouvement. Exprimer la période T des petites oscillations que suivrait le point M si on l'écartait légèrement de cette position pour le laisser évoluer ensuite librement. Comparer T à la période propre T_o d'un pendule simple de longueur a.

R:1°) $F_\theta = -mg.\sin\theta + ka.\sin\theta$; 2°) $U = (ka - mg)a.\cos\theta + ka^2$. 3°) $\ddot{\theta} + (1-\alpha)\frac{g}{a}\sin\theta = 0$; $T = \frac{T_o}{\sqrt{1-\alpha}}$

7. Vibrations dans une molécule diatomique :

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes sont distants de r. L'énergie potentielle d'interaction s'exprime approximativement selon : $E_p = \frac{-a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}$ où a et b sont des constantes positives (Formule de Lenhard-Jones)
1°) Déterminer l'expression de la force d'interaction dérivant de cette énergie potentielle. Tracer la courbe Ep(r).
2°) Déterminer la distance $r_{éq}$ à l'équilibre. Cette position d'équilibre est-elle stable ou instable ?
3°) On suppose dans cette question et dans la suivante que l'un des atomes est beaucoup plus lourd que l'autre, de telle sorte qu'il reste pratiquement au repos dans le référentiel d'étude. A partir de la courbe représentative de Ep(r), discuter les différents mouvements possibles pour l'atome le plus léger.
L'atome le plus léger a une masse m. Déterminer la période de très petites oscillations autour de la position d'équilibre r = $r_{éq}$ pour des déplacement radiaux.

R : $r_{éq} = (2b/a)^{1/6}$. Equilibre stable. Faire un DL2 de Ep(r) en $r_{éq}$ puis dériver E. On tire une équation différentielle linéaire du 2° ordre sur r. Oscillations autour de $r_{éq}$ à pulsation $\omega_o = \sqrt{72b/m}.(2b/a)^{-7/6}$