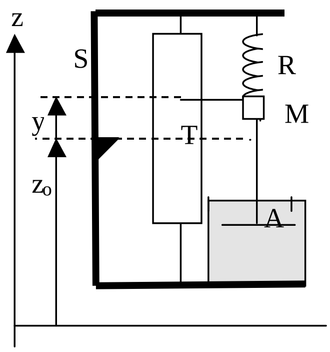
Oscillations mécaniques forcées :

1. Facteur de qualité :

On considère un système mécanique constitué d'un ressort de rappel de raideur k, supportant une masse m, soumis à un frottement visqueux de coefficient f, soumis à une force d'excitation $F = F_O.\cos\omega t$. Le système subit alors des oscillations forcées telles que la position x(t) de la masse m s'écrive : $x(t) = X_o.\cos(\omega t + \varphi)$.
a) Expliciter l'élongation complexe instantanée $\underline{x}(t)$ ainsi que l'amplitude des oscillations X_o.
b) Montrer l'égalité des énergies dissipées par les frottements et fournies par l'excitateur au cours d'une période. Calculer la puissance moyenne $-P_{frott}$ dissipée par frottement en fonction de f, ω, X_o et la puissance moyenne P_{excit} apportée par l'excitateur en fonction de F_o, X_o, f et φ et montrer leur égalité.
c) Quelle est la puissance moyenne de chacune de ces forces à la résonance ? Pour quelle valeur de ω ces puissances sont-elles maximales ?
d) On suppose l'amortissement suffisamment faible pour pouvoir confondre la pulsation de résonance ω_r avec la pulsation propre de l'oscillateur. Le facteur de qualité Q peut être défini par le rapport : $Q = 2\pi.\dfrac{E}{\Delta E}$ où E est l'énergie emmagasinée dans l'oscillateur pour $\omega \approx \omega_O$ et ΔE est l'énergie perdue par frottement, pour $\omega \approx \omega_O$, par période. Montrer que cette définition conduit à $Q = \omega_o /2\alpha$ où $\alpha = f/2m$ est le coefficient d'amortissement.
Vérifier que la définition $Q = \omega_r / \Delta\omega$ du facteur de qualité, comme rapport de la pulsation de résonance ω_r à la bande passante en puissance Δω conduit à la même valeur de Q.

R : a) voir cours. b) $m\ddot{x}\dot{x}+kx\dot{x} = -f\dot{x}^2 + F_o.\cos\omega t.\dot{x}$ *soit :* $\dfrac{dE}{dt} = P_{frott} + P_{excit}$ *; en intégrant sur une période, E variant périodiquement, il vient* $W_{frott}+W_{excit} = 0$. *c)* $-P_{frott} = (1/2)f.\omega^2.X_o^2$ *;* $P_{excit} = (1/2)F_{o.}\omega.Xo.\sin\varphi$ *; en explicitant x(t)par la notation complexe,on tire* $\sin\varphi = f\omega X_o/F_O$ *donc* $P_{excit} = -P_{frott}$ *. Expliciter* P_{excit} *, maximale pour* $\omega = \omega_O$ *(son dénominateur est alors minimal).*
d) $\Delta E = -P_{frott}.T_o$ *;* $E = kX_o^2/2$ *d'où le résultat. Calcul de Δω : bornes de la bande passante définies par* $P_{excit}(\omega) = P_{Max}/2$*. En utilisant* $\alpha << \omega_o$*, l'approx. Au premier ordre amène* $Q = \omega_o/2\alpha$*.*

2. Sismographe :



On considère l'appareil schématisé ci-contre. R est un ressort de raideur k, de longueur à vide L_o , auquel est suspendu un point matériel M de masse m.
Celui-ci subit par l'intermédiaire du système amortisseur A une force de frottement d'expression $\vec{F} = -f\vec{v}$, v étant sa vitesse par rapport au support S.
Le mouvement du point matériel M par rapport à S s'inscrit sur le tambour T grâce à un stylet.
On étudie ce mouvement lorsque S prend par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen, un mouvement connu de direction verticale.
1°) Expliquer qualitativement pourquoi, dans le cas de vibrations verticales rapides du sol, le stylet reproduit ces vibrations en vraie grandeur sur le tambour.
2°) a) Pour l'étude des mouvements on utilise un axe vertical (zz') lié à la Terre et orienté vers le haut.
Quelle est la position $M_{éq}$ du stylet à l'équilibre, quand le support S est immobile ? On appelle $z_O(t)$ la cote sur sur l'axe (Oz) à la date t du point de S coïncidant avec M à l'équilibre et $z(t) = z_O(t) + y(t)$ la cote du point matériel M. Former l'équation différentielle vérifiée par y(t).
b) On modélise les vibrations du sol par $z_O(t) = Z_O.\cos\Omega t$ à une constante près, et l'on cherche y(t) en régime stationnaire sous la forme : $y(t) = Y.\cos(\Omega t+\varphi)$ (Y > 0). En utilisant la notation complexe, exprimer $\alpha = Y/Z_O$ en fonction de la pulsation réduite $x = \Omega/\omega_O$ et du facteur de qualité $Q = m\omega_O/f$ où $\omega_O = \sqrt{k/m}$.
3°) A partir de quelle valeur Q_m de Q la fonction α(x) passe-t-elle par un maximum ? Quelle est la limite de α quand x tend vers l'infini ? Conclusion ? Comment choisir Q pour que le domaine des pulsations pour lesquelles α reste proche de 1 soit le plus étendu possible ?

R : 1°) Du fait de son inertie, M ne suit pas les vibrations si elles sont très rapides : le support se déplace devant un stylet quasi-immobile et celui-ci reproduit les déplacements du support, changés de signe (opposition de phase).
2°)a) Ecrire la RFD pour M(m) dans le référentiel lié à la Terre, galiléen : $m\ddot{y} + m\ddot{z}_O = -f\dot{y} - ky$ *où* $\dot{y}$ *est la vitesse de la masse m par rapport à S (donc du piston dans le cylindre amortisseur) et - ky est la somme du poids et de la force de rappel du ressort ; il vient :* $\ddot{y} + (f/m)\dot{y} + (k/m)y = -\ddot{z}_O$

b) $\alpha = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}\left(2 - \dfrac{1}{Q^2}\right) + 1}}$; $\varphi = Arg\left(1 - x^2 - j.\dfrac{x}{Q}\right)$

3°) $Q_m = 1/\sqrt{2}$.