Oscillations mécaniques forcées (Corrigé).

1. Facteur de qualité :

a) Ecrivons la RFD en projection sur l'axe (Ox) du mouvement : en choisissant l'origine des abscisses telle que le ressort soit détendu pour x = 0, il vient : $m\ddot{x} = -kx - f\dot{x} + F_o \cos\omega t$ (1)
En posant $x(t) = X_o.\cos(\omega t + \varphi)$ et en introduisant l'élongation instantanée complexe :

$$\underline{x} = X_o \exp(i\varphi).\exp(i\omega t)$$

(1) s'écrit : $-m\omega^2\underline{x} = -k\underline{x} - if\omega\underline{x} + F_o \exp(i\omega t)$

dont on tire : $\underline{x} = \dfrac{F_o \exp(i\omega t)}{k - m\omega^2 + if\omega}$

L'amplitude X_o des oscillations correspond au module de x : $X_o = \dfrac{F_o}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2}}$

b) Repartons de l'expression (1). En multipliant par la vitesse : $m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = -f\dot{x}^2 + F_o \cos\omega t\,\dot{x}$
soit : $\dfrac{dE}{dt} = P_{frott} + P_{excit}$; en intégrant sur une période, l'énergie mécanique E variant périodiquement, il vient $W_{frott} + W_{excit} = 0$.

c) Attention : le calcul des puissances ne peut pas se faire en employant la notation complexe ! Il faut utiliser les grandeurs réelles.
- $P_{frott} = \left\langle f\omega^2 X_o{}^2 \sin^2(\omega t + \varphi)\right\rangle = (1/2)f.\omega^2.X_o{}^2$;
$P_{excit} = \left\langle -F_o \cos(\omega t).X_o\omega\sin(\omega t + \varphi)\right\rangle$
soit $P_{excit} = \left\langle -F_o \cos(\omega t).X_o\omega\sin(\omega t)\cos\varphi - F_o \cos(\omega t).X_o\omega\cos(\omega t)\sin\varphi\right\rangle$
donc $P_{excit} = -(1/2)F_o\omega X_o \sin\varphi$;

En exprimant la partie imaginaire de l'amplitude complexe, à partir de : $X_o \exp(i\varphi) = \dfrac{F_o}{k - m\omega^2 + if\omega}$

on tire $\sin\varphi = -f\omega X_o/F_o$ donc on retrouve : $P_{excit} = -P_{frott}$.

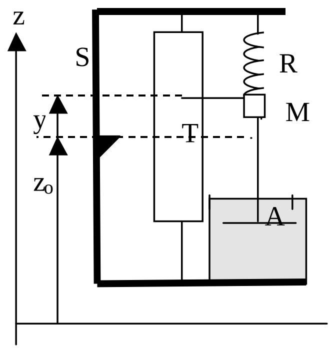
$P_{excit} = (1/2)f.\omega^2.X_o{}^2 = \dfrac{1}{2} f\omega^2 \dfrac{F_o{}^2}{(k - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{F_o{}^2/f}{\left(\dfrac{k}{f\omega} - \dfrac{m\omega}{f}\right)^2 + 1}$, de valeur maximale pour $\omega = \omega_O$

telle que : $\dfrac{k}{f\omega} - \dfrac{m\omega}{f} = 0$ soit $\omega_o{}^2 = k/m$. (son dénominateur est alors minimal).

d) ΔE est le travail du frottement sur un période $T \approx T_o$ soit $\Delta E = -P_{frott}.T_o$; $E = kX_o{}^2/2$ d'où, en confondant ω et ω_o : $\dfrac{E}{\Delta E} = \dfrac{\frac{1}{2}kX_o{}^2}{\frac{1}{2}f\omega_o{}^2 X_o{}^2.T_o} = \dfrac{k}{f.k/m}\dfrac{\omega_o}{2\pi}$ d'où finalement : Q $2\pi\dfrac{E}{\Delta E} =$ $\omega_o/2\alpha$ où $\alpha = f/2m$

Calcul de $\Delta\omega$: bornes de la bande passante définies par $P_{excit}(\omega) = P_{Max}/2$.
En utilisant $\alpha \ll \omega_o$, l'approximation au premier ordre amène $Q = \omega_o/2\alpha$.

2. Sismographe :



1°) Du fait de son inertie, M ne suit pas les vibrations si elles sont très rapides : le support se déplace devant un stylet quasi-immobile et celui-ci reproduit les déplacements du support, changés de signe (opposition de phase).

2°)a) Ecrire la RFD pour M(m) dans le référentiel lié à la Terre, galiléen :

A l'équilibre, les forces doivent se compenser : $m\ddot{z} = 0 = -mg + k\Delta L_o$ où ΔL_o est l'allongement du ressort quand M est à sa position d'équilibre, de cote z_o.

Pour z(t), on aura $z(t) = z_o(t) + y(t)$ et l'allongement du ressort vaudra : $\Delta L = \Delta L_o - y(t)$.

La RFD donne alors : $m\ddot{z} = -mg + k\Delta L_o - ky - f\dot{y}$ le dernier terme correspond à la force de frottement visqueux due au mouvement relatif de M par rapport au bâti de l'appareil (donc du piston dans le cylindre amortisseur), de vitesse $\dot{y}$.

On en déduit : $m\ddot{y} + m\ddot{z}_o = -f\dot{y} - ky$; il vient l'équation sur y(t) : $\ddot{y} + (f/m)\dot{y} + (k/m)y = -\ddot{z}_o$ (1)

b) En introduisant la notation complexe dans (1) : $\left(k - m\omega^2\right)\underline{y} + if\omega\underline{y} = \omega^2 Z_o\exp(i\omega t)$

soit en notant $\omega_o^2 = k/m$ et $x = \omega/\omega_o$ et $Q = m\omega_o/f$:

$$\alpha = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}\left(2 - \dfrac{1}{Q^2}\right) + 1}} \qquad \varphi = Arg\left(1 - x^2 - i.\frac{x}{Q}\right)$$

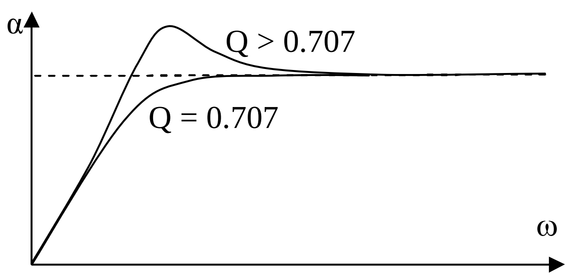
3°) L'existence d'un maximum pour α est conditionnée par celle d'un minimum pour la quantité située sous la racine dans le dénominateur : $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}\left(2 - \dfrac{1}{Q^2}\right) + 1$

Posons $U = 1/x^2$. La fonction f(U) = $U^2 - U\left(2 - \dfrac{1}{Q^2}\right) + 1$ admettra un minimum si sa dérivée peut s'annuler et si sa dérivée seconde est positive en ce point.

$\dfrac{df}{dU} = 2U - \left(2 - \dfrac{1}{Q^2}\right)$ va s'annuler en : $U = \left(1 - \dfrac{1}{2Q^2}\right)$ qui n'a de solution acceptable que si U > 0 donc pour $Q > Q_m = 1/\sqrt{2}$.

On peut vérifier que : $\dfrac{d^2 f}{dU^2} = 2 \geq 0$. On a bien un minimum de f(U) en $\dfrac{1}{x^2} = \left(1 - \dfrac{1}{2Q^2}\right)$ soit pour la pulsation : $\omega = \dfrac{\omega_o}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}}$.

Pour $x \to \infty$: $\alpha \to 1$; Pour $x \to 0$: $\alpha \to 0$.



Il faut choisir $Q = 1/\sqrt{2}$ qui mènera à une réponse la mieux adaptée.