OSCILLATIONS MECANIQUES LIBRES

1. Pendule simple :

On considère un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m suspendue par un fil de longueur l sur un support fixe dans le référentiel d'étude. Le fil est inextensible et de masse négligeable devant m.

a) On écarte le pendule d'un angle θ_o quelconque à partir de la verticale. Le pendule ne subit aucun frottement. Déterminer l'équation de son mouvement de deux façons. A quelle condition le pendule est-il un oscillateur harmonique libre non amorti ?

b) Ecrire l'équation du mouvement en présence d'une force de frottement fluide $\mathbf{f} = -h.\mathbf{v}$ pour de petits mouvements. A quelle condition obtiendra-t-on des oscillations pseudo-périodiques ? Exprimer $\theta(t)$. Quelle est la différence relative entre la pseudo période T observée et la période propre T_o du pendule ?

R : (a) par la R.F.D, ou par l'expression de l'énergie du système, que l'on dérive par rapport au temps : $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$. *C'est un osc. harmonique si* θ *est petit : alors* $\sin\theta = \theta$

b) Si frottement, il s'ajoute un terme (h/m)$\dot{\theta}$ *dans l'équation du mouvement .Pour de petits mouvement, en linéarisant* $\sin\theta = \theta$: $\ddot{\theta}+\frac{h}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$.

Le discriminant de l'EC doit être < 0. $T = 2\pi/\omega$ *avec* $\omega=\sqrt{\omega_o{}^2-\lambda^2}$

2. Energie et facteur de qualité :

Une masse m, mobile selon un axe (Ox) est reliée par un ressort de raideur k, de longueur à vide l_o à un support fixe. On repère son mouvement par rapport à la position où le ressort est détendu. Elle est de plus soumise à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -2\lambda m\dot{x}\vec{e}_x$

On exerce graduellement une force F_o selon l'axe (Ox), amenant le mobile en une position X_O. A l'instant t = 0 , on supprime brusquement la force F_o.

1°) Donner l'expression de x(t) dans le cas où le facteur de qualité Q de l'oscillateur ainsi constitué est grand devant 1.

2°) Montrer que l'énergie mécanique du système vérifie dans ces conditions la loi :

$E_m(t) = E_m(0).\exp(-t/\tau)$ et exprimer τ en fonction de la pulsation propre ω_o et du facteur de qualité Q du système.

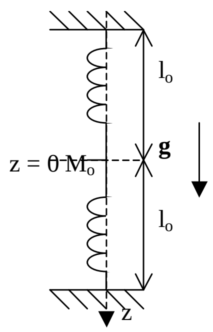
3°) En déduire que l'on a : $Q=2\pi\frac{E_m(t)}{E_m(t)-E_m(t+T_o)}$

où $T_o = 2\pi / \omega_o \approx T$ pseudo-période du système.

R : 1°) Ecrire la R.F.D. La résolution donne : $x(t) = (F_o/k)\exp(-\lambda t).\cos(\omega t)$.

2°) Calculer E_c *et* $E_p = (1/2)kx^2$. $\omega \approx \omega_o$ *si Q est grand.*

3. Oscillateur amorti :



On envisage le dispositif représenté ci-contre, où deux ressorts verticaux identiques, de longueur à vide l_o et de raideur k supportent une masse m.

A l'instant initial, on lâche la masse m sans vitesse en la position M_o située à mi-chemin des points d'attache des deux ressorts, alors non tendus. On note g l'intensité du champ de pesanteur.

Les frottements sont pris en compte sous la forme d'une force $-f.\mathbf{v}$ de norme proportionnelle à la vitesse du mobile. f est supposé suffisamment faible pour avoir des oscillations.
1°) Donner sans calcul différentiel l'allure du graphe z(t).
2°) Calculer z(t).
3°) Le temps de réponse à 1 % du système, τ, est défini comme la durée nécessaire pour que l'écart relatif entre z(t) et $z(\infty)$ soit majorée par 1 %. Calculer τ en fonction de m et f.
4°) Faire un bilan énergétique du phénomène. Dans quelles proportions la variation d'énergie potentielle de pesanteur du mobile s'est-elle dégradée par frottement ?

R : 1°) à $t = 0$: $z = 0$, $v = 0$; à $t \to \infty$: $z_\infty = mg/2k$, $v_\infty = 0$.
2°) R.F.D. : $md^2z/dt^2 = mg - 2.kz - f.dz/dt$. D'où $z(t) = mg/2k + A.\exp(-\lambda t)\cos(\omega t+\varphi)$. A et φ déterminées par les CI : $z(0) = 0$ et $dz/dt\,(0) = 0$; $\tan\varphi = -\lambda/\omega$; $A = -(mg/2k)/\cos\varphi$.
3°) chercher t tel que $\exp(-\lambda t) < 0,01$.
4°) $\Delta E_c = 0$, donc $W_{frott} = \Delta E_p$. avec $E_p = -\,mgz + 2.(1/2)\,kz^2$. $W_{frott} = -m^2g^2/4k$.

4. Oscillateur harmonique linéaire : traitement énergétique et portrait de phase.

Un oscillateur linéaire est constitué par une masse ponctuelle m en mouvement selon un axe (Ox) sous le seul effet d'une force de rappel vers le point O et dont la valeur est $F = -kx$ en projection sur (Ox).
Les grandeurs m et k sont deux constantes positives caractéristiques du système.
1°) A un instant donné, l'état du système est décrit par trois grandeurs :
x, mesure algébrique donnant la position ; p la quantité de mouvement ;
E l'énergie mécanique totale.
Ecrire l'équation d'état f(x, p, E) = 0 reliant ces trois variables.
2°) Dans cette question et dans les suivantes (sauf (6°)), E est constante.
L'équation f(x, p, E) = 0 devient donc une relation entre p et x.
a) Représenter dans le plan (x, p) l'ensemble des états successifs du système.
b) Dans quel sens la courbe obtenue est-elle parcourue ?
c) Calculer l'aire intérieure à la courbe. Interpréter physiquement le résultat.
On note $\omega_o^2 = k/m$ la pulsation propre de l'oscillateur et l'on rappelle que pour une ellipse :
$S = \pi$ (1/2 grand axe)*(1/2 petit axe).
3°) E étant fixée, préciser l'amplitude maximale du mouvement de l'oscillateur ainsi que la vitesse maximale atteinte.
4°) En comparant l'équation d'état f(x, p, E) = 0 avec la relation $\sin^2u + \cos^2u = 1$, donner la représentation paramétrique de la courbe obtenue au (3) sous la forme : x = x(u) et p = p(u).
5°) A partir du système {x = x(u) ; p = p(u)}, établir une équation différentielle du premier ordre reliant u au temps t. Calculer u = u(t) et donner alors l'équation x = x(t).
6°) Lors du passage en x = 0, le mobile subit pendant une durée très courte Δt l'action d' une force constante dirigée dans le sens du mouvement, de module F. Quel est le gain d'énergie qui en résulte ? Donner l'allure du portrait de phase correspondant à ce phénomène.

R : $E = p^2/2m + kx^2/2$. avec E = ctse : $p^2/2mE + kx^2/2E = 1$
la courbe p(x) est une ellipse droite, de demi-axes $\sqrt{2E/k}$ et $\sqrt{2Em}$. : $p = \sqrt{2Em}\cos u$ et
$x = \sqrt{2E/k}\sin u$; $p = m\dot{x}$ donne $\dot{u} = \sqrt{k/m}$ dont on tire :
$x(t) = \sqrt{2E/k}\sin(\sqrt{k/m}\,t + u_o)$. $\Delta E = F\sqrt{2E/m}\,\Delta t$.