OSCILLATIONS MECANIQUES LIBRES

1. Pendule simple :

Par la R.F.D, ou par l'expression de l'énergie mécanique du système, que l'on dérive par rapport au temps : $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$. (voir cours)

si θ est petit : alors sinθ ≈ θ qui amène $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_o = \sqrt{g/l}$

b) En présence de frottement, il intervient la force : $\vec{f}=-h\vec{v}=-hl\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$. (le mouvement étant circulaire : $\vec{v}=l\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$).

Dans l'équation du mouvement s'ajoute un terme $\frac{h\dot{\theta}}{m}$.

Pour de petits mouvement, en linéarisant sinθ ≈ θ : $\ddot{\theta}+\frac{h}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0$.

L'équation est maintenant celle d'un oscillateur harmonique amorti.

Le discriminant de l'équation caractéristique : $r^2 + (h/m).r+g/l = 0$

doit être négatif pour avoir des oscillations. Soit : $\frac{h^2}{m^2}-4\frac{g}{l}<0$.

Dans ces conditions, les solutions de l'équation caractéristique s'écrivent : $r=-\frac{h}{2m}\pm j\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{h^2}{4m^2}}$ menant à une solution sur θ(t) de forme :

$$\theta(t)=D.\exp\left(\frac{-ht}{2m}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{h^2}{4m^2}}.t+\varphi\right)=\exp(-\lambda t)\cos(\omega t+\varphi)$$

avec $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{h^2}{4m^2}}=\sqrt{\omega_o{}^2-\lambda^2}$ en posant λ = h/2m.

C'est une solution pseudo périodique, de pseudo période : T = 2π /ω .

$\Delta T/T_o = (1/\sqrt{1-(\lambda/\omega_o)^2}) - 1$.

2. Energie et facteur de qualité :

1°) Ecrire la R.F.D. en projection sur l'axe du mouvement : $m\ddot{x}=-kx-2\lambda m\dot{x}$

soit l'équation différentielle : $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$

Q étant supposé grand devant 1, il est donc nécessairement > 1/2, ce qui correspond à un discriminant Δ pour l'équation caractéristique de valeur négative : régime pseudo-périodique.

Les solutions de cette équation caractéristique sont complexes conjuguées à partie réelle négative : $r=-\lambda\pm i\sqrt{\omega_o{}^2-\lambda^2}$ avec $\omega_o^2 = k/m$

En posant $\omega = \sqrt{\omega_o{}^2 - \lambda^2}$ on a pour solution générale :

$$x(t) = \exp(-\lambda t).\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

Soit avec pour conditions initiales $x(0) = F_o/k$ et $dx/dt(0) = 0$, qui conduisent aux valeurs des constantes :

$$A = F_o/k \quad \text{et} \quad B = (\lambda/\omega).F_o/k << F_o/k.$$

$$x(t) = \exp(-\lambda t).\left(\frac{F_o}{k}\cos\omega t + \frac{\lambda F}{k\omega_o}\sin\omega t\right)$$

Comme Q >>1, $\lambda << \omega_o$, donc $\omega \approx \omega_o$ et $B = (\lambda/\omega).F_o/k << F_o/k$.

La résolution donne donc finalement approximativement : $x(t) = (F_o/k)\exp(-\lambda t).\cos(\omega_o t)$.

2°) Calculons la vitesse du mobile :

$$\dot{x}(t) = -\left(F_o/k\right)\omega_o.\exp(-\lambda t)\sin(\omega_o t) - \lambda\left(F_o/k\right)\exp(-\lambda t).\cos(\omega_o t) \approx -\left(F_o/k\right)\omega_o.\exp(-\lambda t)\sin(\omega_o t)$$

Il vient alors : $E_c = \frac{1}{2}m\left(F_o/k\right)^2\omega_o{}^2.\exp(-2\lambda t)\sin^2(\omega_o t) = \frac{1}{2}k\left(F_o/k\right)^2.\exp(-2\lambda t)\sin^2(\omega_o t)$ et

$E_p = \frac{1}{2}k\left(F_o/k\right)^2.\exp(-2\lambda t)\cos^2(\omega_o t)$.

Donc : $E = \frac{1}{2}k\left(F_o/k\right)^2.\exp(-2\lambda t) = E(0).\exp(-2\lambda t)$

on peut identifier : $\tau = 1/2\lambda = Q/\omega_o$.

3°) $$\frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T_o)} = \frac{\exp(-2\lambda t)}{\exp(-2\lambda t) - \exp(-2\lambda t).\exp(-2\lambda T_o)}$$

où $T_o = 2\pi/\omega_o$. la quantité λT_o est donc faible.

On peut faire un DL1 sur l'exponentielle.

Il vient : $\frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T_o)} \approx \frac{1}{1-(1-2\lambda T_o)} \approx \frac{\omega_o}{4\pi\lambda}$ on en déduit : $Q \approx 2\pi\frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T_o)}$

3. Oscillateur amorti :

1°) à t = 0 : z = 0, v = dz/dt = 0 ; à $t \to \infty$: $z_\infty = mg/2k$, $v_\infty = 0$. $z_\infty = mg/2k$ correspond à la valeur de z à l'équilibre.

2°) R.F.D. : La force appliquée à M par chacun des ressorts est orientée dans le même sens (l'un est comprimé et l'autre allongé pour une valeur donnée de z).

$m\ddot{z} = mg - 2.kz - f.\dot{z}$ qui donne sous forme canonique : $\ddot{z} + \frac{f}{m}\dot{z} + 2\frac{k}{m}z = g$

La résolution donne : $z(t) = mg/2k + A.\exp(-\lambda t)\cos(\omega t + \varphi)$. (f étant faible, on a des oscillations pseudo périodique par hypothèse) .

A et φ sont déterminées par les CI : z(0) = 0 et dz/dt (0) =0 ;
on tire : $\tan\varphi = -\lambda/\omega$; $A = -(mg/2k)/\cos\varphi$.

3°) Chercher t tel que $\exp(-\lambda t) < 0{,}01$, soit $t = (1/\lambda).\ln 100$ (la démarche est approximative, mais relativement correcte.
Un calcul exact n'est pas envisageable, sauf à l'aide d'une simulation numérique.

4°) $\Delta E_c = 0$, car la vitesse du mobile est initialement nulle, et le redeviendra à la fin des oscillations. donc $W_{frott} = \Delta E = \Delta E_p$. avec $E_p = -\, mgz + 2.(1/2)\, kz^2$. $W_{frott} = -m^2g^2/4k$.

4. Oscillateur harmonique linéaire : traitement énergétique et portrait de phase.

1°) $E = p^2/2m + kx^2/2$. avec E = cste : $p^2/(2mE) + kx^2/2E = 1$

2°) a) la courbe p(x) est une ellipse droite, de demi-axes $\sqrt{2E/k}$ (sur x)
et $\sqrt{2Em}$ (sur p).

b) Cette ellipse est parcourue dans le sens horaire : pour $p = m\dot{x} > 0$, x sera croissant et inversement.
c) La formule donnant l'aire d'une ellipse de demi axes a et b est : $S = \pi ab$. Donc ici l'aire de l'ellipse vaut : $S = 2\pi E\sqrt{m/k}$. La valeur $\sqrt{m/k}$ est l'inverse de la pulsation propre du système et donc $S = E.T_o$ où T_o est la période propre des oscillations.

Remarque : le produit de l'impulsion p par la position x est de la dimension du produit de l'énergie par un temps.

3°) L'amplitude du mouvement correspond à la valeur maximale de x : $\sqrt{2E/k}$, tandis que la vitesse maximale est obtenue à partir de la valeur maximale de p :
$v_{max} = \sqrt{2Em}/m = \sqrt{2E/m}$

4°) $p = \sqrt{2Em}\cos u$ et $x = \sqrt{2E/k}\sin u$;

5°) $p = m\dot{x}$ donne $\dot{u} = \sqrt{k/m}$ dont on tire :
$x(t) = \sqrt{2E/k}\sin(\sqrt{k/m}\, t + u_o)$.

6°) En x = 0, $p^2 = 2Em$ soit : $v = \sqrt{2E/m}$
Le gain d'énergie correspond au travail de la force F, sur la durée Δt : $\Delta E = W = F.v.\Delta t$
Remarque : On néglige dans cette expression la variation de vitesse Δv ainsi occasionnée (le terme $F.\Delta v.\Delta t$ est d'ordre 2).
Soit donc : $\Delta E = F\sqrt{2E/m}\,\Delta t$.
Si Δt est bref, x change très peu durant le phénomène : on a un accroissement brutal de p (choc) qui se traduit en $x \approx 0$ par un « saut » de la valeur de p (discontinuité). Le système évolue ensuite sur une nouvelle ellipse d'aire $S' = (E + \Delta E).T_o$ un peu plus grande. Les valeurs de x_{max} et p_{max} changent consécutivement à cette variation de E.