

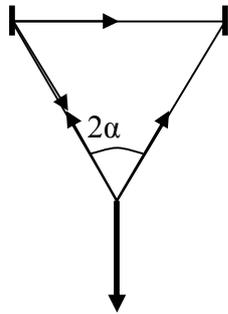
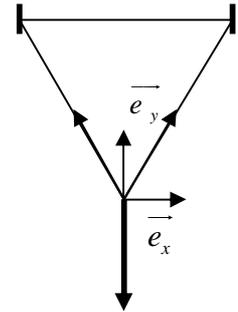
RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE :

1. Tension sur une corde .

L'équilibre dynamique s'écrit vectoriellement : $\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$

avec en norme $T_1 = T_2 = T$.

La même valeur de tension T, en norme, s'exerce tout au long de l'anneau de corde.



En projetant sur la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y)

on tire : $T = F/(2\cos\alpha)$.

Chaque piton subit l'action des deux brins de la corde. La résultante exercée sur chaque piton est donc :

$$(T \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + T)\vec{e}_x - T \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\vec{e}_y = \frac{F}{2}\left(\tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)\vec{e}_x - \frac{F}{2}\vec{e}_y$$

soit en norme :

$$T_{\text{piton}} = \sqrt{\frac{F^2}{4}\left(\tan\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 + \frac{F^2}{4}}$$

Si α devient faible, T_{piton} tend vers $F/2$; si α se rapproche de $\pi/2$, alors T_{piton} augmente très rapidement.

2. Tension d'un fil massique :

Ecrivons la R.F.D. pour un élément de fil de masse dm , compris entre les abscisses x et $x+dx$ (l'axe (Ox) étant vertical descendant). Les actions qui s'exercent sur cet élément de fils seront son poids, la tension sur l'extrémité d'abscisse x et celle sur l'extrémité d'abscisse $x+dx$. En projetant l'équation d'équilibre de ces forces sur l'axe (Ox) :

$$dm \cdot g - T(x) + T(x+dx) = 0 \quad \text{avec } dm = (m/L)dx$$

$$\text{équation différentielle donnant : } dT/dx = -mg/L$$

d'où par intégration et avec la condition limite $T(L) = 0$: $T(x) = -mg((x/L) - 1)$.

On remarquera que $T(0) = mg$ correspond au poids de l'ensemble de la corde.

3. Deux masses reliées par une poulie :

Toutes les actions envisagées se traduisent par des forces colinéaires à l'axe vertical.

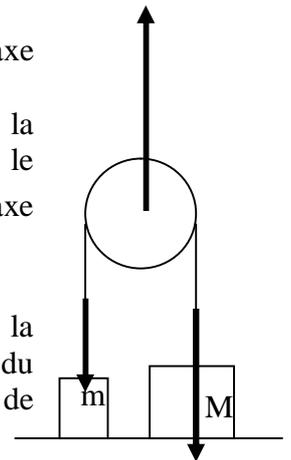
Isolons d'abord la poulie en tant que système. La RFD amène à écrire que la somme des forces qu'elle subit est nulle, car sa masse étant négligeable, le terme $m_{\text{poulie}} \cdot \gamma_{\text{poulie}}$ peut être considéré comme nul. La force F exercée sur l'axe de la poulie se répartit donc sur chaque masse en $F/2$.

Appliquons maintenant la RFD au système « masse m » : la masse m subit la tension du brin de gauche, de norme $F/2$, dirigée vers le haut, la réaction du support (tant que la masse m repose sur le plan horizontal, et son poids, de norme mg .

$$\text{En projetant sur l'axe vertical : } m \ddot{z}_m = -mg + \frac{F}{2} + (R_m)$$

De même en écrivant maintenant la RFD au système « masse M », et en projetant sur l'axe

$$\text{vertical : } m \ddot{z}_M = -Mg + \frac{F}{2} + (R_M)$$

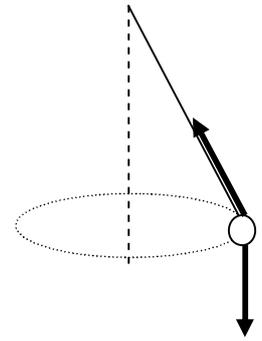


3 cas possibles : $F < 2mg$: pas de mouvement, les deux masses m et M reposent sur le plan de travail ; $2mg < F < 2Mg$: seule m en mouvement, R_m s'annule dès que la masse m décolle ; $F > 2Mg$: m et M en mouvement, les réactions R_m et R_M s'annulent.

4. Pendule conique :

RFD : $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$; le mouvement ayant lieu par hypothèse selon une trajectoire circulaire horizontale, on aura en coordonnées cylindriques :

$$\vec{OM} = l \sin \alpha \vec{e}_r \quad (z = \text{cste}) ; \quad \vec{v} = l \sin \alpha \cdot \dot{\theta} \vec{e}_\theta ; \quad \vec{\gamma} = l \sin \alpha \cdot \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - l \sin \alpha \cdot \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$



En explicitant la RFD sur la base cylindrique :

$$m\vec{\gamma} = ml \sin \alpha \cdot \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - ml \sin \alpha \cdot \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -T \sin \alpha \vec{e}_r + (T \cos \alpha - mg) \vec{e}_z$$

En identifiant termes à termes :

$$\ddot{\theta} = 0 = d\omega / dt \quad \text{donc } \omega = \text{cste} ;$$

$$T \cdot \cos \alpha - mg = 0 \quad \text{donc } T = mg / \cos \alpha$$

$$\text{et } -ml \sin \alpha \cdot \omega^2 = -T \sin \alpha \quad \text{qui donne : } \alpha = \arccos(g/l\omega^2).$$

5. Test de freinage :

R : en intégrant la R.F.D., on tire : $F_o = mv_1/T$; $D = mv_1^2/(2 \cdot F_o)$.

En projetant la RFD sur l'axe horizontal (Ox) : $m\ddot{x} = -F_o$

avec la condition initiale $v(t=0) = v_1$, on intègre cette équation en : $\dot{x} = -\frac{F_o}{m}t + v_1$

L'arrêt du véhicule a lieu à l'instant T, donc $0 = v_1 - F_o \cdot T/m$ d'où $F_o = mv_1/T$.

Une seconde intégration donne : $x = -\frac{F_o}{2m}t^2 + v_1t$ qui donne la distance d'arrêt en calculant $x(t=T)$: $D = mv_1^2/(2 \cdot F_o)$.

La distance d'arrêt augmente avec le carré de la vitesse.

6. Crash-test :

a) La RFD projetée selon l'axe (Ox) donne : $m\ddot{x} = -kx$

En effet, vu le schéma, l'abscisse x du mobile correspond à la compression du ressort

Intégrons la R.F.D., avec les C.I. : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_i$.

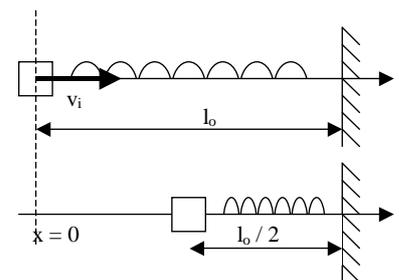
$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{où } A = 0 ;$$

$$\text{alors } \dot{x}(t) = B \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \text{qui impose : } B = v_i \sqrt{\frac{m}{k}}$$

b) La condition $v(\Delta t) = 0$ pour $x(\Delta t) = l_o/2$ amène $k = 4mv_i^2/l_o^2$;

c) $v(\Delta t) = 0$ impose $\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta t = \frac{\pi}{2}$ d'où $\Delta t = \pi l_o/(4v_i)$;

d) $\gamma_{\max} = F_{\max}/m = k \cdot x_{\max}/m$ d'où $\gamma_{\max} = 2v_i^2/l_o$



7. Satellite circulaire :

RFD : $m\vec{\gamma} = m\overline{G(r)} = -\frac{KMm}{r^2}\vec{e}_r$; le mouvement ayant lieu par hypothèse selon une trajectoire circulaire, on aura en coordonnées polaires :

$$\overline{OM} = r\vec{e}_r \text{ avec } r = \text{cste} ; \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta ; \vec{\gamma} = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

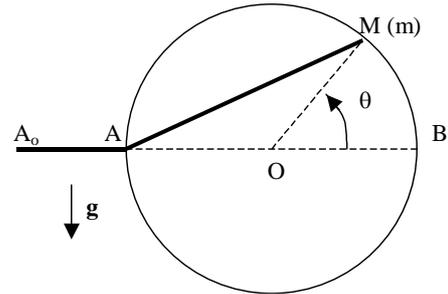
Par identification on aura : $\ddot{\theta} = 0 = d\omega/dt$ donc $\omega = \text{cste}$ mouvement circulaire uniforme ;

$$v^2 = (r\omega)^2 = KMm/r \text{ où } r = R + h \text{ donc } v^2 = KM/(R+h).$$

$$v_0 = 7920 \text{ m/s} = 28500 \text{ km/h pour } h \approx 0. T = 2\pi(R+h)/v \text{ donne } T_0 = 1 \text{ h } 24 \text{ mn } 37 \text{ s pour } h \approx 0.$$

8. Equilibre d'un point matériel :

1°) Les actions exercées sur l'anneau M(m) sont : son poids, la réaction du support, normale au cerceau (pas de frottement) et donc de direction radiale, la force de rappel élastique, portée par (MA).



Dans le triangle (AOM), isocèle, l'angle (AOM) vaut $\pi - \theta$; les angles (OAM) et (AMO) valent donc $\theta/2$.

$$\text{La condition d'équilibre se traduit par : } \sum \vec{F} = -k\overline{MA} + m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

Projetons cette relation sur la direction (Mx) tangente au cerceau en M :

$$-k.MA.\sin(\theta/2) + mg.\cos\theta = 0 \text{ avec } MA = BA.\cos(\theta/2) = 2a.\cos(\theta/2)$$

$$\text{On tire : } \tan\theta = mg/ka$$

Il y a deux solutions à cette équation : $\theta_1 = \text{atan}(mg/ka)$ et $\theta_2 = \theta_1 + \pi$.

2°) Pour discuter la stabilité, on envisage un déplacement $d\theta$ à partir d'une des positions d'équilibre et l'on discute du sens de la force dF_x qui apparaît suite à ce déplacement.

$$dF_x = d(-ka.\sin\theta + mg.\cos\theta) = (-ka.\cos\theta - mg.\sin\theta).d\theta$$

Partant de θ_1 entre 0 et $\pi/2$; dF_x est du signe de $d\theta$: équilibre instable,

Partant de $\theta_2 = \theta_1 + \pi$; dF_x est de signe opposé à celui de $d\theta$: équilibre stable.

9. Tension d'un pendule :

$$\overline{OM} = L\vec{e}_r \text{ avec } L = \text{cste} ; \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e}_\theta ; \vec{\gamma} = L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Le pendule est soumis à la tension du fil et à son poids.

Projetons la R.F.D. sur la base polaire :

$$m\vec{\gamma} = mL\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mL\dot{\theta}^2\vec{e}_r = (mg \cos\theta - T)\vec{e}_r + (-mg \sin\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\text{Par identification, on obtient : } mL\ddot{\theta} = -mg \sin\theta \text{ soit } \ddot{\theta} = -(g/L)\sin\theta \quad (1)$$

$$\text{et } -mL\dot{\theta}^2 = mg \cos\theta - T \quad (2)$$

En multipliant préalablement (1) membre à membre par le facteur $\dot{\theta}$ qui conduit à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = (g/L) \frac{d}{dt} (\cos\theta) , \text{ on intègre en } \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_o^2}{2} \right) = (g/L)(\cos\theta - 1)$$

$$\text{soit } (v^2 - v_o^2) = (2gL)(\cos\theta - 1) \quad (3)$$

Remarque : le même résultat peut être établi à l'aide du théorème de l'énergie cinétique, écrit entre l'état initial ($\theta = 0$, $v = v_0$) et l'état (θ , v).

$$\Delta E_c = W s'écrit : m(v^2 - v_0^2)/2 = -mgz \quad \text{avec } z = L(1 - \cos\theta).$$

La tension du fil s'obtient à partir de (2) : $T = mg \cdot \cos\theta + mv^2/L$ qui amène d'après (3)

$$T = 3mg \cdot \cos\theta - 2mg + mv_0^2/L$$

On doit distinguer 3 cas, selon que le pendule oscille faiblement, monte puis se détend ou fait un tour en restant tendu.

Si le domaine de valeur de θ à envisager est limité par l'annulation de v , on aura alors :

$$\cos\theta = 1 - (v_0^2/2L)$$

Dans ce cas, $T = mg - (mv_0^2/2L)$; le fil est tendu si T , la tension reste > 0 , qui aboutit à la condition $v_0^2 < 2gl$.

Si le fil peut faire au moins 1 tour, on va envisager la valeur la plus défavorable pour la condition $T > 0$, soit pour $\theta = \pi$; ce qui mène à $v_0^2 > 5gl$.

Si la vitesse initiale est telle que $2gL < v_0^2 < 5gL$, on aura alors un pendule qui va monter et atteindre une valeur de position θ telle qu'il se détende.

Ceci correspond à la valeur θ_d de θ annulant T , solution de $3mg \cdot \cos\theta - 2mg + mv_0^2/L = 0$

10. Glissement sur une sphère :

a) $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ avec $r = \text{cste}$; $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$; $\vec{\gamma} = r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

La particule est soumise à la réaction de la sphère, orthogonale à sa surface et donc radiale, et à son poids, vertical.

Projetons la R.F.D. sur la base polaire :

$$m\vec{\gamma} = mr\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mr\dot{\theta}^2\vec{e}_r = (-mg \cos\theta + R)\vec{e}_r + (mg \sin\theta)\vec{e}_\theta$$

Par identification, on obtient : $mr\ddot{\theta} = mg \sin\theta$

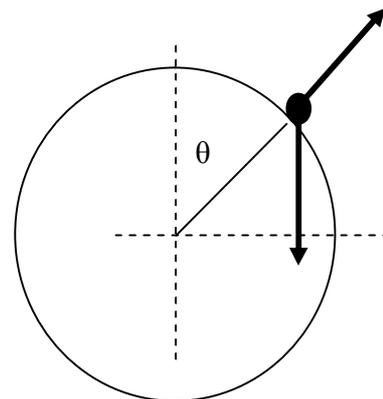
$$\text{soit } \ddot{\theta} = (g/r)\sin\theta \quad (1)$$

$$\text{et } -mr\dot{\theta}^2 = -mg \cos\theta + R \quad (2)$$

En multipliant préalablement (1) membre à membre par le facteur $\dot{\theta}$ qui conduit à

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = (g/r) \frac{d}{dt} (-\cos\theta) \quad , \quad \text{on intègre en } \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} \right) = (g/r)(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\text{soit } (v^2 - v_0^2) = (2gr)(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 2g(z_0 - z) \quad (3) \quad \text{avec } z = r \cdot \cos\theta.$$



Remarque : le même résultat peut être établi à l'aide du théorème de l'énergie cinétique, écrit entre l'état initial ($z = z_0$, $v = v_0$) et l'état (z , v).

$$\Delta E_c = W s'écrit : m(v^2 - v_0^2)/2 = -mg\Delta z$$

En utilisant l'équation (2), il vient : $mg \cos\theta - m \frac{v^2}{r} = +R$

$$\text{soit en injectant le résultat (3) : } R = mg \frac{z}{r} - m \frac{v_0^2}{r} - 2mg \frac{z_0 - z}{r}$$

soit finalement : $R = 3mg \frac{z}{r} - m \frac{v_o^2}{r} - 2mg \frac{z_o}{r}$

b) La particule quitte la sphère à partir du moment où la réaction R s'annule. Elle la quittera dès le départ pour $R = 0$ à $z = z_o$, soit $v_o = V = \sqrt{gz_o}$. A.N. : $V = 3,0$ m/s.

c) Si $v_o = V/2$, la particule quittera la sphère pour z_d telle que $R = 0$, soit avec $z_o = r$: $z_d = 3r/4$ donc pour un angle $\theta_d = \arccos(3/4) = 41^\circ$; d'où $l = r \cdot \theta_d = 65$ cm.

11. Oscillateur spatial :

1°) Lors du lancement de la particule, le mouvement est amorcé dans le plan (\vec{r}_o, \vec{v}_o) défini par les vecteurs position et vitesse initiales. La seule force mise en jeu étant colinéaire au vecteur position, elle ne comportera pas de terme orthogonal à ce plan. La vitesse de particule va donc rester contenue dans le plan établi par les conditions initiales.

La RFD donne $\sum \vec{F} = -k\vec{r} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ soit $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{k}{m}\vec{r} = \vec{0}$

qui a la forme voulue en posant $\omega_o^2 = k/m$.

La projection sur la base cartésienne donne : $\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0$

et $\ddot{y} + \omega_o^2 y = 0$

La solution de ces équations, compte tenu des conditions initiales fixant : $x(0) = r_o$; $y(0) = 0$; $dx/dt(0) = \alpha$ et $dy/dt(0) = \beta$ donne une trajectoire elliptique d'équation paramétrée :

$$x(t) = r_o \cos \omega_o t + (\alpha / \omega_o) \sin \omega_o t \quad ; \quad y(t) = (\beta / \omega_o) \sin \omega_o t$$

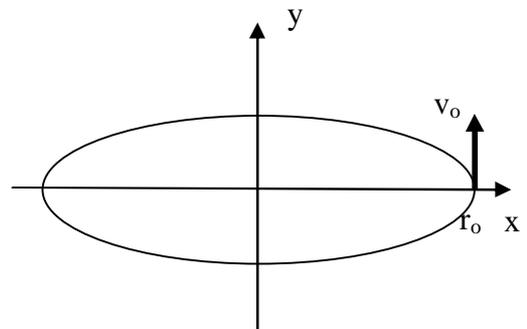
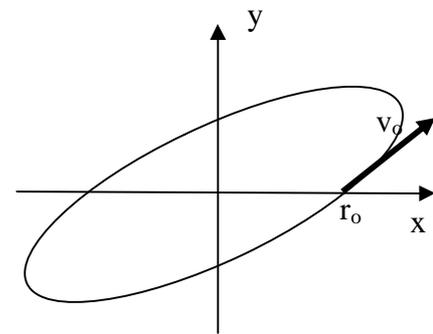
Pour la vitesse :

$$dx/dt = -r_o \omega_o \sin \omega_o t + \alpha \cos \omega_o t \quad ; \quad dy/dt = \beta \cos \omega_o t$$

2°) Avec ces conditions initiales, la vitesse initiale est orthogonale au vecteur position initial.

Donc $\alpha = 0$ et $\beta = v_o$.

On a alors une ellipse droite, x variant entre $-r_o$ et $+r_o$, y variant entre $-\beta/\omega_o$ et $+\beta/\omega_o$. La vitesse est alors orthogonale à l'axe (Ox) ou l'axe (Oy).



$$\vec{r} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} r_o \cos \omega_o t & -r_o \omega_o \sin \omega_o t & 0 \\ (\beta / \omega_o) \sin \omega_o t & \beta \cos \omega_o t & 0 \\ 0 & 0 & r_o \beta \end{vmatrix} = 2dS/dt \vec{e}_z = r_o \beta \vec{e}_z$$

3°) trajectoire circulaire si $\beta/\omega_o = r_o$ soit pour $v_o = r_o \omega_o$ avec \vec{v}_o orthoradiale.

12. Intégration d'un mouvement par la méthode d'Euler :

1°) écrivons l'équilibre lorsque l'oiseau atteint sa vitesse maximale, en projetant la RFD sur la direction verticale : $mg - k \cdot v_{lim}^2 = 0$ d'où : $k/m = g / v_{lim}^2$ A.N. : $k/m = 8,8 \cdot 10^{-4}$ usi

2°) méthode d'Euler. Les résultats seraient affinés avec une procédure informatique permettant un pas plus réduit.

La loi de frottement devrait évoluer avec la vitesse de l'oiseau : en début de phénomène, la vitesse est faible et donc la loi de frottement quadratique n'est pas la plus adaptée.

modèle à force de frottement quadratique : $F = k.v^2$

k/m (usi) 0,00088 pas de calcul : Delta t = 1

Procédure de calcul par la méthode d'Euler :

$$\Delta v = g \cdot \Delta t - (k.v^2/m) \cdot \Delta t$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta v$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t) \cdot \Delta t$$

temps	vitesse	Delta v	temps	position	temps	vitesse (km/h)
0	0	9,8	0	0	0	0
1	9,8	9,7154848	1	9,8	1	35,28
2	19,5154848	9,46484835	2	29,3154848	2	70,2557453
3	28,9803332	9,06092346	3	58,295818	3	104,329199
4	38,0412566	8,52651926	4	96,3370746	4	136,948524
5	46,5677759	7,89166918	5	142,90485	5	167,643993
6	54,459445	7,19006858	6	197,364295	6	196,054002
7	61,6495136	6,45541697	7	259,013809	7	221,938249
8	68,1049306	5,71831222	8	327,11874	8	245,17775
9	73,8232428	5,00411336	9	400,941983	9	265,763674
10	78,8273562	4,33189817	10	479,769339	10	283,778482
11	83,1592543	3,71439381	11	562,928593	11	299,373316
12	86,8736482	3,15861295	12	649,802241	12	312,745133
13	90,0322611	2,66688893	13	739,834502	13	324,11614
14	92,69915	2,23804347	14	832,533652	14	333,71694
15	94,9371935	1,86849778	15	927,470846	15	341,773897

Remarque : il importe de choisir un pas de calcul suffisamment fin, sous peine d'avoir des résultats aberrants

nouveau pas de calcul : 5

temps	vitesse	Delta v	temps	position	temps	vitesse (km/h)
0	0	9,8	0	0	0	0
1	9,8	48,577424	1	9,8	1	35,28
2	58,377424	6,8010272	2	68,177424	2	210,158726
3	65,1784512	6,06155716	3	133,355875	3	234,642424
4	71,2400084	5,33387786	4	204,595884	4	256,46403
5	76,5738862	4,64006715	5	281,16977	5	275,66599
6	81,2139534	3,99577852	6	362,383723	6	292,370232
7	85,2097319	3,4105854	7	447,593455	7	306,755035
8	88,6203173	2,88886664	8	536,213772	8	319,033142
9	91,5091839	2,43094094	9	627,722956	9	329,433062
10	93,9401249	2,03422258	10	721,663081	10	338,18445
11	95,9743475	1,69425367	11	817,637429	11	345,507651
12	97,6686011	1,40554303	12	915,30603	12	351,606964
13	99,0741442	1,16219628	13	1014,38017	13	356,666919
14	100,23634	0,95835493	14	1114,61651	14	360,850826
15	101,194695	0,78847759	15	1215,81121	15	364,300903

