RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE :

Un peu de méthode !

Une étude mécanique doit systématiquement commencer par la définition d'un **système** et d'un **référentiel** de définition du mouvement. Les situations relativement simples envisagées en cette première partie de l'année ne doivent pas amener à négliger ce préliminaire essentiel. La modélisation d'un système sous forme d'un point matériel, l'examen du caractère galiléen ou non du référentiel d'étude sont des étapes parfois non évidentes. (voir ex. n°2 & 3).

Une fois le système et le référentiel définis, il faut lister les actions mécaniques s'exerçant sur ce système. Dans le cas d'un système modélisé comme un point matériel, ces actions se réduisent aux forces extérieures appliquées au système.

On prendra garde au caractère conditionnel de certaines forces (en particulier les forces de réaction d'un support, quand la liaison est unilatérale). (voir ex. n°3, 9 & 10).

L'écriture vectorielle de la R.F.D. : $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$ n'est qu'un préalable. Cette relation ne sera exploitable qu'une fois projetée sur une base vectorielle, si possible judicieusement choisie.
L'expression de l'accélération sur la base choisie doit ne pas constituer de difficulté.

Dans certaines situations, le mouvement est à priori connu, partiellement ou complètement, et la question porte sur les conditions dynamiques d'obtention de ce mouvement.(ex n°4, 10).

La situation classique où interviennent des forces de réaction d'un support, de tension d'un fil ou d'une barre..., met en jeu des forces dont l'intensité est à priori inconnue. On aura intérêt alors à projeter la R.F.D. sur une direction orthogonale afin d'éliminer ces forces des relations, ce qui permet d'obtenir alors l'équation du mouvement.

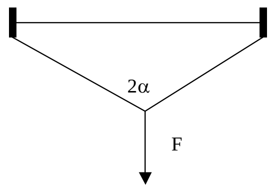
L'intégration de la R.F.D. conduit à la description du mouvement.

La situation, très classique, d'un tir dans le champ de pesanteur, en l'absence de frottement, doit être considérée comme un cas très particulier.
En effet, le mouvement est alors à accélération uniforme : $\vec{\gamma} = \vec{g} = \overrightarrow{Cste}$. L'intégration de la R.F.D. projetée sur la base cartésienne, invariante, est aisée (voir cours).

Dans la plupart des cas, l'accélération ne sera pas invariante, et l'intégration du mouvement sera un peu plus délicate. La R.F.D. pourra conduire à la résolution d'une équation différentielle (ex 6 par exemple) ou mettra en jeu une base locale dont les vecteurs varient dans le temps (ex 4, 7, 9, 10).

L'équation : $m\dfrac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \dfrac{-GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ décrivant le mouvement d'un satellite de masse m en interaction gravitationnelle avec un astre de masse M ne s'intègre pas en : $\vec{v} = \dfrac{-GM}{r^2}.t.\overrightarrow{e_r}$ (sic !), notamment parce que $\overrightarrow{e_r}$ n'est pas un vecteur invariant. (voir exercice 11).

RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE :



1. Tension sur une corde : un anneau de corde est passé dans deux pitons fixés dans un mur et soumis à la traction F. Calculer la tension de la corde en fonction de l'angle α et de l'effort F. Quelles sont les actions exercées sur les pitons ?

R : $T = F/2\cos\alpha$.

2. Tension d'un fil massique : Un fil vertical, immobile, de masse m, homogène et de longueur L, est suspendu en un point O. Il ne subit que l'action de la pesanteur g. Calculer la tension T(x) du fil à une distance x du point d'attache O.

R : R.F.D. pour un élément de fil de masse dm $\rightarrow$ équa. diff. donnant dT/dx, d'où $T(x) = -mg((x/L) - 1)$.

3. Sur une poulie d'inertie négligeable passe un fil dont les deux brins verticaux supportent l'un une masse m et l'autre une masse M > m. Les deux masses reposent initialement sur le sol, les deux fils étant tendus. On exerce une force F verticale, perpendiculaire à l'axe de la poulie. Déterminer les accélérations γ et Γ prises par les deux masses.

R : F se répartit sur chaque masse en F/2. 3 cas possibles : F < 2mg : pas de mouvement ; 2mg < F < 2Mg : seule m en mouvement ; F > 2Mg : m et M en mouvement.

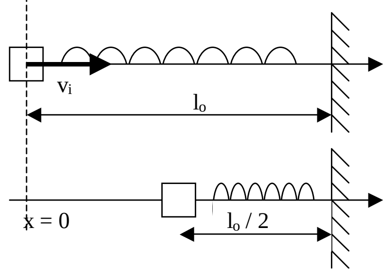
4. Pendule conique : une masse m, considérée comme ponctuelle, suspendue à un fil de longueur L, tourne autour de l'axe (Oz), vertical, selon une trajectoire circulaire. On note g l'intensité du champ de pesanteur. Montrer que la vitesse angulaire ω est constante. Calculer l'angle α entre le fil et (Oz) ainsi que la tension T du fil.

R : $\alpha = \arccos(g/L\omega^2)$. $T=-mg / \cos\alpha$.

5. Test de freinage :
Une voiture est repérée par le point G de coordonnées (x, y) dans le référentiel terrestre R (O, x, y, z), supposé galiléen. On note $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ la base cartésienne correspondante. La voiture est assimilée à un point matériel de position G et de masse m = 1300 kg.
Lors d'un test de freinage, la voiture roule sur une route horizontale et freine alors que sa vitesse est v_1 = 100 km.h^{-1}. Le temps nécessaire à l'arrêt complet du véhicule est T = 7 s. On suppose que la décélération est constante.
a) Déterminer la force de freinage F_o et la distance d'arrêt D.
b) On suppose que la force de freinage reste à la même valeur F_o mais on teste plusieurs vitesse de départ, comprises entre 0 et 130 km.$^{-1}$.
Expliciter D en fonction de F_o , m et v_1 puis tracer la courbe D = f(v_1). Que peut-on conclure quant au respect des limitations de vitesses sur route ?

R : en intégrant la R.F.D., on tire : $F_o = mv_1/T$; $D = mv_1^2/(2.F_o)$.

6. Crash-test :



On veut modéliser le comportement la voiture de l'exercice précédent lors d'un choc frontal. L'avant de la voiture (qui va se déformer lors du choc) est modélisé par un ressort de masse négligeable, de longueur à vide l_o = 2 m (longueur au début du choc) et de raideur k.
Au début du choc, la voiture arrive avec une vitesse initiale v_i = 36 km.h^{-1}. La vitesse de l'automobile s'annule lorsque le ressort s'est comprimé de l_o / 2. On néglige tout frottement.

a) Ecrire l'équation différentielle du mouvement et déterminer x(t).
b) Donner l'expression de la raideur k en fonction de l_o , m et v_i puis calculer sa valeur numérique.
c) Donner l' expression, puis calculer la valeur numérique de la durée Δt du choc.
d) Donner l'expression, puis calculer la valeur numérique de l'accélération maximale subie par le véhicule durant le choc. Conclure sur les effets sur le conducteur.

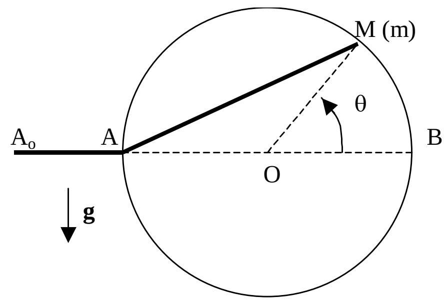
R : a) intégrer la R.F.D., avec les C.I. : $x(t) = \frac{l_o}{2}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}.t$ *; b)* $k = 4mv_i^2/l_o^2$ *;*

c) $\Delta t = \pi l_o/(4v_i)$ *; d)* $\gamma_{max} = F_{max}/m$ *d'où* $\gamma_{max} = 2v_i^2/l_o$

7. Satellite circulaire :
Un satellite suit une orbite circulaire autour de la Terre, d'altitude h. On donne R = 6400 km pour le rayon terrestre et $K = 6{,}67.10^{-11}$ u.s.i. constante universelle de gravitation et la masse de la Terre $M = 6{,}02.10^{24}$ kg.
Montrer à partir de la R.F.D. que le mouvement est uniforme. Déterminer la vitesse du satellite. Calculer numériquement la vitesse v_o et la période T_o d'un satellite en orbite basse, soit pour une altitude h << R.

R : $v^2 = KM/(R+h)$. $v_o = 7920$ *m/s = 28500 km/h.* T_o *= 1h 24mn 37s*

8. Equilibre d'un point materiel :
Un anneau M, de masse m est enfilé sur un cerceau de diamètre [A,B], de rayon a et de centre O, sur lequel il glisse sans frottement.
M est soumis à l'action d'un élastique de longueur à vide $l_o = A_oA$, de raideur k, coulissant en A.
On note **g** le champ de pesanteur.
La position de M est définie par l'angle θ = (**OB**, **OM**).
1°) Déterminer les positions d'équilibre de M sur le cerceau.
2°) Discuter leur stabilité.



R : 1°) $\tan\theta = mg/ka$ *; 2°)* θ_1 *entre 0 et* $\pi/2$ *instable,* $\theta_2 = \theta_1+\pi$ *stable.*

9. Tension d'un pendule : Un fil inextensible de longueur L, dont l'une des extrémités est liée à un point fixe O, porte à l'autre extrémité M une masse ponctuelle m. Le fil est initialement vertical. On communique à la masse une vitesse v_o horizontale. Relier la position du pendule à la vitesse de la masse m à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.
Déterminer les valeurs de v_O pour lesquelles le fil reste tendu au cours du mouvement.

R : $\frac{1}{2}.m(v^2-v_o^2) = -mgz$ *avec* $z = L(1 - \cos\theta)$.
projeter la R.F.D. sur la base polaire ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$*). fil tendu si T, la tension reste > 0. 3 cas, selon que le pendule oscille faiblement, monte puis se détend ou fait un tour en restant tendu.*
On trouve : $v_O^2 < 2gl$ *ou* $v_O^2 > 5gl$.

10. Glissement sur une sphère :
Une particule de masse m est lancée du point S_O (de cote $z_O = r\cos\theta_O$) d'une sphère de centre O, de rayon r, avec une vitesse $\mathbf{V_O}$ (tangente à la sphère et contenue dans le plan vertical passant par O) ; elle glisse sans frottement sur la sphère puis décolle et quitte la sphère en un point S_1. On désignera par g l'accélération de la pesanteur.
a) Exprimer la réaction R du support sur la particule en fonction de sa cote $z = r\cos\theta$ à chaque instant, et des données m, r, g, V_O et z_O.
b) Montrer que si V_O est supérieur à une vitesse V que l'on déterminera, la particule quitte la sphère dès le départ. (application numérique : g = 10 m/s² ; r = 90 cm ; $\theta_O = 0$).

c) Calculer le chemin parcouru par la particule sur la sphère, si elle est lancée avec une vitesse initiale $V_O = V/2$.

R : a) Relier la position du mobile à sa vitesse à l'aide du théorème de l'énergie cinétique, ou en intégrant la RFD projetée selon la direction orthoradiale. Expliciter R à partir de la projection de la RFD selon la direction radiale.
$R = (m/r).[g(3z - 2 z_O) - V_O^2]$; b) $V = \sqrt{g z_o}$; $l = 65$ cm.

11. Oscillateur spatial : On montre qu'une particule restant au voisinage d'une position d'équilibre stable O peut être modélisée comme un point matériel soumis à une force de rappel d'expression : **F** = -k**OM** = -k **r**.
1°) On étudie d'abord le mouvement de la particule, de masse m, pour des conditions initiales quelconques. On note $\mathbf{r_O}$ le vecteur position et $\mathbf{v_O}$ la vitesse initiales. Montrer que le mouvement est plan. On repère par les axes Ox et Oy le plan du mouvement.
On note $\mathbf{r_O} = r_O\, \mathbf{e_X}$ et $\mathbf{v_O} = \alpha\, \mathbf{e_X} + \beta\, \mathbf{e_y}$. Etablir l'équation du mouvement : $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_o{}^2\vec{r} = \vec{0}$
Déterminer la trajectoire, tracer son allure et préciser l'évolution de la vitesse de la particule.
2°) Examiner le cas particulier où $\mathbf{r_O}.\mathbf{v_O} = 0$; déterminer les valeurs minimale (péricentre) et maximale (apocentre) de r ainsi que la vitesse en ces points. Vérifier que le mouvement est conforme à la Loi des Aires, s'exprimant ici par : $\vec{r} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{cste}$.
3°) A quelle conditions la trajectoire peut-elle être circulaire ?

R : (1) trajectoire elliptique. $x(t) = r_o \cos\omega_o t + (\alpha/\omega_o)\sin\omega_o t$; $\dot{y}(t) = \beta\cos\omega_o t$ (2) $dS/dt = r_o\beta/2$
(3) $v_o = r_o\omega_o$ avec $\mathbf{v_o}$ orthoradiale.

12. Intégration d'un mouvement par la méthode d'Euler :
1°) Un faucon en piqué peut atteindre la vitesse de 380 $km.h^{-1}$. On fait l'hypothèse d'un modèle quadratique pour le frottement de l'air ; la force de frottement de l'air a alorsun module s'exprimant par $f = (1/2)\rho S C_x v^2 = k.v^2$. Déterminer la valeur du rapport k/m où m est la masse de l'oiseau.
2°) Le rapace déclenche son piqué alors qu'il était en vol stationnaire. Calculer l'évolution de sa vitesse durant les 10 premières secondes du mouvement, en discrétisant le problème avec un pas Δt de 1 seconde. Evaluer de même l'évolution de son altitude.
Discuter la validité du modèle employé.

R: 1°) écrire l'équilibre lorsque l'oiseau atteint sa vitesse maximale. $k/m = g / v_{lim}^2$
2°) méthode d'Euler. Les résultats seraient affinés avec une procédure informatique permettant un pas plus réduit. La loi de frottement devrait évoluer avec la vitesse de l'oiseau.