CHANGEMENTS DE REFERENTIELS

0. Calculer les expressions de la vitesse et de l'accélération absolue d'un mobile M en coordonnées sphériques : $r = OM$; $\theta = (Oz, OM)$; $\varphi = (Ox, Om)$ où m est le projeté de M sur le plan (xOy), à partir des expressions ayant trait à la composition des vitesses et des accélérations.
R : L'idée est de considérer le mouvement de M dans le plan polaire et de composer avec la rotation d'angle φ de ce plan autour de l'axe vertical (Oz) : $\overrightarrow{v_a} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u_\varphi}$ *; (assez facile)*

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \left[\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\right]\overrightarrow{u_r} + \left[(1/r)\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right]\overrightarrow{u_\theta} + \left[(1/r\sin\theta)\frac{d(r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi})}{dt}\right]\overrightarrow{u_\varphi}$$

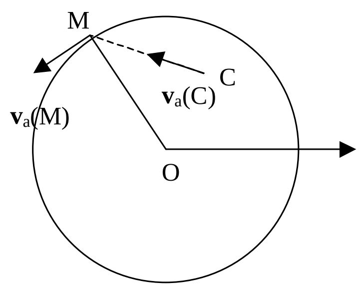
(Calculatoire)

*Les exemples suivant pourraient se résoudre à partir des formules générales de composition des vitesses et accélérations (voir cours). On aura profit à retrouver ces résultats en considérant plutôt le "**point coïncident**" avec le mobile dont on étudie le mouvement.*

1. Une roue de centre C, de rayon R, d'axe (OC) horizontal, roule sans glisser sur un plan horizontal, autour d'un axe (Oz) fixe, vertical. On note a la distance OC. Le mouvement est uniforme : on note ω la vitesse angulaire de rotation de (OC) autour de (Oz). $\omega = d\theta/dt = \text{cste}$.
On note $\Omega = d\varphi/dt$ la vitesse angulaire de rotation de la roue autour de son axe.
On définit la base ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}$), orthonormée directe ; i_1 est un unitaire de (OC) dirigé de O vers C ; **k** est l'unitaire vertical ascendant.
1°) Exprimer les vitesses relatives et absolues d'un point M du bord de la roue, quand il passe au sommet S de la roue, puis en son point de contact I avec le plan horizontal.
En exprimant le non-glissement de la roue sur le plan, en déduire une condition reliant ω, Ω, a et R. Représenter les vecteurs vitesses relatives, d'entraînement et absolues de M en S et en I.
2°) Calculer l'accélération relative de M lorsqu'il passe en S, en fonction de R et Ω, puis en fonction de a, R et ω. Calculer l'accélération absolue de M passant en S, et évaluer l'angle α existant entre le vecteur accélération absolue et le plan fixe horizontal.

2. Le référentiel fixe est lié au point O, centre du repère (OXYZ). Le référentiel mobile (R') est centré en un point G décrivant un cercle de centre O et de rayon a constant, à la vitesse angulaire constante $\dot\theta$. Dans (R'), le point M décrit un cercle de centre G et de rayon b constant, avec la vitesse angulaire constante $\dot\alpha$. On introduit la base polaire (**u**, **v**) où **u** est l'unitaire de la droite (GM). Relier la base polaire (**u**, **v**) à la base (**x**, **y**, **z**).
Calculer la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M, ainsi que son accélération relative, son accélération d'entraînement et son accélération complémentaire. On exprimera les résultats le plus simplement possible en fonction des vecteurs **u**, **v**, **x** et **y**.

3. Un canard M nage à vitesse constante u en restant au bord d'un lac circulaire de rayon a.
Un chien C poursuit le canard en nageant **dans sa direction** avec une vitesse w < u.
Le canard est repéré par l'angle φ entre son rayon vecteur **OM** et un axe Ox pris comme origine.
Dans le référentiel du canard (M, **i**, **j**) où **i** est un vecteur unitaire dirigé de M vers O et **j** est le vecteur directement perpendiculaire, la position du chien est donnée par ses coordonnées polaires ρ et θ. (θ = (CMO)).



1°) Déterminer les équations différentielles donnant le mouvement du chien en fonction du temps, obtenues par projection dans la base polaire ($\mathbf{u}_\rho$, $\mathbf{u}_\theta$) où $\mathbf{u}_\rho$ est l'unitaire de (MC) défini dans ce sens, θ étant l'angle (**i**, $\mathbf{u}_\rho$).
2°) Dans le cas particulier où la vitesse du chien w = u/2, montrer que la trajectoire asymptotique du chien est un cercle dont on déterminera le rayon et que l'angle θ tend vers une valeur limite que l'on calculera.

R : Le référentiel absolu est le référentiel terrestre, le référentiel relatif est lié au canard, écrire la vitesse absolue du chien sur la base ($\mathbf{u}_\rho$, $\mathbf{u}_\theta$)
D'où $\dot\rho - u.\sin\theta = w$ *et* $\rho\,\dot\theta + \rho\,\dot\varphi - u$.

$\cos\theta = 0$

asymptote ($\dot\rho = 0$) *pour* $\sin\theta = w/u$.