CHANGEMENTS DE REFERENTIELS (CORRIGES)

*Les exemples suivant pourraient se résoudre à partir des formules générales de composition des vitesses et accélérations (voir cours). On aura profit à retrouver ces résultats en considérant plutôt le "**point coïncident**" avec le mobile dont on étudie le mouvement.*

0. Vitesse et accélération en coordonnées sphériques :

Considérons un référentiel relatif lié au plan polaire $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}\right)$, c'est-à-dire un plan défini à φ = cste.

Dans ce référentiel, le point M évolue avec une vitesse relative d'expression générale : $\vec{v_r} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

Ce plan polaire est entraîné en rotation autour de l'axe (Oz) avec un vecteur rotation $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e_z}$

La vitesse d'entraînement est celle du point coïncident, qui a un mouvement circulaire de rayon r.sinθ, sa trajectoire se trouvant dans un plan orthogonal à l'axe (Oz).

$\vec{v_e} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \dot{\varphi}\,\vec{e_z} \wedge \left(\vec{OH} + \vec{HM}\right)$ avec $\vec{OH} = z\vec{e_z}$ qui est colinéaire au vecteur rotation et

$\vec{HM} = r\sin\theta\vec{u}$ où l'unitaire $\vec{u}$ est orthogonal à l'axe (Oz).

Donc : $\vec{v_e} = \dot{\varphi}\,\vec{e_z} \wedge r\sin\theta\vec{u} = r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$

En rassemblant ces résultats : $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e} = \vec{v_r} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$

Même méthode pour l'accélération :

$\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$ où $\vec{\gamma_r}$ est l'accélération en coordonnées polaires (dériver la vitesse en coordonnées polaires) : $\vec{\gamma_r} = \dfrac{d\vec{v_r}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta}$

L'accélération d'entraînement est celle du point coïncident. En se référant au cas du mouvement circulaire (non uniforme) : $\vec{\gamma_e} = -r\sin\theta\,\dot{\varphi}^2\,\vec{u} + r\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$ où l'on a un terme d'accélération normale (centripète) et un terme d'accélération tangentielle.

$$\vec{\gamma_e} = -r\sin\theta\,\dot{\varphi}^2\left(\cos\theta\vec{e_r} + \sin\theta\vec{e_\theta}\right) + r\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$

NB : l'accélération d'entraînement N'EST PAS LA DERIVEE DE LA VITESSE D'ENTRAINEMENT !!

Enfin l'accélération complémentaire se calcule en référence à la formule établie en cours :

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r} = 2\,\dot{\varphi}\,\vec{e_z} \wedge \left(\dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\right) = 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e_\varphi} + 2r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\theta\vec{e_\varphi}$$

1. Roue roulant sur un plan horizontal, en tournant autour d'un axe vertical :

Le vecteur rotation traduisant la rotation de la rue autour de son axe (horizontal) s'écrit : $\vec{\Omega} = -\dot{\varphi}\,\vec{i_1}$

Le vecteur traduisant l'entraînement en rotation de l'axe de la roue (OC) autour de l'axe vertical (Oz) s'écrit : $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.

1°) La vitesse relative d'un point M de la roue par rapport à son moyeu est : $\vec{v_r} = \vec{\Omega} \wedge \vec{CM} = R\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$

La vitesse d'entraînement, en se référant au mouvement du point coïncident, qui est un mouvement circulaire autour de l'axe (Oz), s'écrit : $\vec{v_e} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{OC} + \vec{CM}\right) = a\,\dot{\theta}\,\vec{y_1} + R\,\dot{\theta}\,\vec{k} \wedge \vec{e_r}$

La vitesse absolue s'obtient en sommant ces deux termes.

Quand M passe en I, point de contact de la roue sur le plan : $\vec{CM} = -R\vec{k}$ car $\vec{e_r} = -\vec{k}$ et $\vec{e_\varphi} = -\vec{j_1}$

il vient : $\vec{v_a}\left(MenI\right) = \left(R\,\dot{\varphi} - a\,\dot{\theta}\right)\vec{y_1}$

Quand M passe en S, au sommet de la roue : $\overrightarrow{CM} = +R\vec{k}$ car $\vec{e_r} = +\vec{k}$ et $\vec{e_\varphi} = +\vec{j_1}$

il vient : $\vec{v_a}(MenS) = \left(R\dot{\varphi} + a\dot{\theta}\right)\vec{y_1}$

La condition de non glissement de la roue sur le plan consiste à écrire que le point M de la roue doit avoir même vitesse absolue que le support quand il passe au niveau du point de contact (ce qui traduit le fait que l'on n'a pas de vitesse relative entre les deux objets, roue et plan-support au niveau du point de contact).

Comme ici le support est immobile dans le référentiel absolu, il vient : $\vec{v_a}(MenI) = \left(R\dot{\varphi} - a\dot{\theta}\right)\vec{y_1} = \vec{0}$

D'où : $R\dot{\varphi} = a\dot{\theta}$

2°) accélération relative : le mouvement de M par rapport au moyeu est un mouvement circulaire uniforme, d'accélération centripète ; on a donc $\vec{\gamma_r} = -R\dot{\varphi}^2\,\vec{e_r}$

donc lorsque M passe en S : $\vec{\gamma_r} = -R\dot{\varphi}^2\,\vec{k} = -\dfrac{a^2\dot{\theta}^2}{R}\vec{k}$

accélération d'entraînement : le mouvement du point coïncident à M est un mouvement circulaire uniforme, autour de l'axe vertical (Oz), d'accélération centripète ; on a donc $\vec{\gamma_e} = -a\dot{\theta}^2\,\vec{i_1}$

Enfin l'accélération complémentaire se calcule en référence à la formule établie en cours :

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r} = 2\omega\vec{k} \wedge R\dot{\varphi}\,\vec{j_1} = -2\omega R\dot{\varphi}\,\vec{i_1} = -2a\dot{\theta}^2\,\vec{i_1}$$

L'accélération absolue est la somme de ces trois termes : $\vec{\gamma_a} = \vec{\gamma_r} + \vec{\gamma_e} + \vec{\gamma_c}$

soit $\vec{\gamma_a} = -3a\dot{\theta}^2\,\vec{i_1} - -\dfrac{a^2}{R}\dot{\theta}^2\,\vec{k}$

L'angle α est donc l'angle en l'accélération absolue et les termes d'entraînement et complémentaires.

En utilisant les coordonnées de l'accélération relative, on tire : $\tan\alpha = \dfrac{a}{3R}$

2. Entraînement en rotation :

Relions la base polaire (**u**, **v**) à la base (**x**, **y**, **z**) : $\vec{u} = \cos\theta\vec{x} + \sin\theta\vec{y}$; $\vec{v} = -\sin\theta\vec{x} + \cos\theta\vec{y}$

La vitesse relative est celle d'un mouvement de rotation, de rayon b et de vitesse angulaire $\dot{\alpha}$: $\vec{v_r} = b\dot{\alpha}\vec{v}$

La vitesse d'entraînement s'obtient en considérant le mouvement circulaire du point coïncident, de vitesse angulaire $\dot{\theta}$: $\vec{v_e} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\omega} \wedge \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right) = \dot{\theta}\vec{z} \wedge \left(a\vec{x} + b\vec{u}\right) = a\dot{\theta}\vec{y} + b\dot{\theta}\vec{v}$

D'où : $\vec{v_a} = a\dot{\theta}\vec{y} + b\left(\dot{\alpha} + \dot{\theta}\right)\vec{v}$

accélération relative : le mouvement de M par rapport à G est un mouvement circulaire uniforme, d'accélération centripète ; on a donc $\vec{\gamma_r} = -b\dot{\alpha}^2\,\vec{u}$

accélération d'entraînement : le mouvement du point coïncident à M est un mouvement circulaire uniforme, autour de l'axe vertical (Oz), d'accélération centripète ; on a donc $\vec{\gamma_e} = \dot{\theta}\vec{z} \wedge \left(\dot{\theta}\vec{z} \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\dot{\theta}^2\left(a\vec{x} + b\vec{u}\right)$

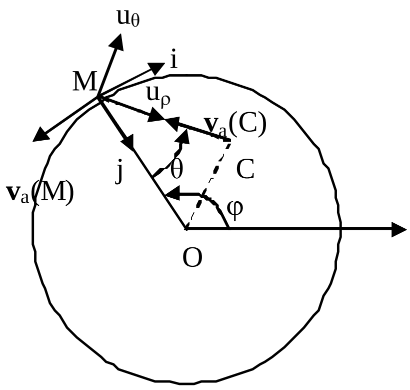
Enfin l'accélération complémentaire se calcule en référence à la formule établie en cours :

$$\vec{\gamma_c} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r} = 2\dot{\theta}\vec{z} \wedge b\dot{\alpha}\vec{v} == -2b\dot{\alpha}\dot{\theta}\vec{u}$$

Il est ensuite très aisé d'expliciter ces vitesses et accélération sur la base de notre choix vues les realtions établies entre les deux bases (**u**, **v**) et (**x**, **y**, **z**) .

3. Le canard et le chien :

exercice plus difficile que les précédents, demandant une modélisation plus délicate de la question.



La vitesse absolue du chien a pour module w et est dirigée à tout instant vers le canard : $\overrightarrow{v_a(C)} = -w\overrightarrow{u_\rho}$

La vitesse absolue du canard est : $\overrightarrow{v_a(M)} = \vec{\Phi} \wedge \overrightarrow{OM}$

où le vecteur rotation : $\vec{\Phi} = \dot{\varphi}\vec{k}$ et $\overrightarrow{OM} = -a\vec{i}$

donc : $\overrightarrow{v_a(M)} = -a\dot{\varphi}\,\vec{j} = -u\,\vec{j}$ (1)

puisque la vitesse du canard a pour module u.

Le référentiel absolu est le référentiel terrestre. On prend pour référentiel relatif celui lié au canard M.

Dans ce référentiel, la position du chien est : $\overrightarrow{MC} = \rho\overrightarrow{u_\rho} = \rho\cos\theta\vec{i} + \rho\sin\theta\vec{j}$

où la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est invariante.

Par contre ρ et θ varient. La vitesse relative est, par dérivation du vecteur position dans le référentiel relatif :

$$\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{MC}}{dt} = \dot{\rho}\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right) + \rho\dot{\theta}\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \quad (2)$$

La vitesse d'entraînement est : $\overrightarrow{v_e(C)} = \vec{\Phi} \wedge \overrightarrow{OC} = \dot{\varphi}\vec{k} \wedge (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}) = -a\dot{\varphi}\,\vec{j} + \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\theta}$ (3)

En explicitant tous les vecteurs sur la même base $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$ à partir des relations (1) (2) et (3), la loi de composition des vitesses mène au système :

$\dot{\rho}$ - usinθ = w (A) et $\rho\dot{\theta} + \rho\dot{\varphi}$ - ucosθ = 0 (B)

On cherche la trajectoire asymptotique du chien, donc pour l'asymptote ($\dot{\rho} = 0$), obtenue si : sin θ = w/u.

Soit donc θ = = cste = θ_o = asin(w/u).

Dans ces conditions, en introduisant $\dot{\theta} = 0$ dans (B), il vient : $\rho = a\cos\theta_o = a\sqrt{1 - \frac{w^2}{u^2}}$

Pour tout valeur de w < u, le chien n'attrapera pas le canard : il fint par le poursuivre indéfiniment selon une trajectoire circulaire de rayon inférieur à a.