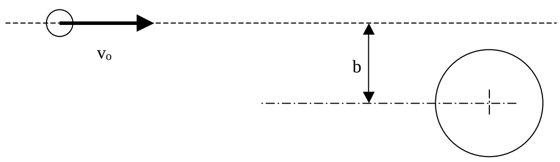
Théorème du moment cinétique et RFD :

1. Expression analytique, mouvement à force centrale : Calculer les expressions du moment cinétique d'un point matériel M quelconque par rapport à O, origine du repère d'étude en coordonnées cylindriques, puis en coordonnées sphériques.
Une particule chargée, de charge +2e et de masse m (noyau d'hélium), est projetée avec une vitesse vo et un paramètre d'impact b (voir schéma) en direction d'une particule de masse M et de charge +Ze (noyau métallique).



Exprimer la force d'interaction existant entre ces deux particules.
Le noyau métallique étant beaucoup plus massique, on peut le considérer comme immobile dans le référentiel d'étude, supposé galiléen.
Montrer que le mouvement étudié est plan. Donner l'expression du moment cinétique du mobile en coordonnées polaires, et donner sa valeur.
R : $F = 2Ze^2/(4\pi\varepsilon o r^2)$. force centrale, L = cste. (voir cours). $L = mr^2(d\theta/dt) = mbv_o$.

2. Satellite circulaire :
Un satellite suit une orbite circulaire autour de la Terre, d'altitude h.
On donne R = 6400 km pour le rayon terrestre et $K = 6{,}67.10^{-11}$ u.s.i. constante universelle de gravitation et la masse de la Terre $M = 6{,}02.10^{24}$ kg.
Montrer à l'aide du théorème du moment cinétique que le mouvement est uniforme. Déterminer la vitesse du satellite à partir de la RFD. Calculer numériquement la vitesse v_o et la période T_o d'un satellite en orbite basse, soit pour h << R.

R : $v^2 = KM/(R+h)$. v_o = 7920 m/s = 28500 km/h. T_o = 1h 24 mn 37 s

3. Atome de Bohr :
Soit un proton de charge +e, fixe dans le référentiel d'étude, et un électron de charge –e, animé d'un mouvement circulaire uniforme autour du proton.
1°) Montrer que le mouvement est nécessairement plan. Dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire, montrer à l'aide du TMC que le mouvement sera alors nécessairement uniforme.
2°) L'expérience montre que l'énergie totale du système est quantifiée, c'est à dire qu'elle peut se mettre sous la forme : $E = -K/n^2$ où n est un entier positif et K une constante positive ne dépendant que des caractéristiques du système.
Montrer que le rayon de la trajectoire est quantifié, selon la loi $r = n^2.a_o$ où a_o est le rayon de Bohr, que l'on exprimera en fonction de e, K et $\varepsilon_o = 8{,}84.10^{-12}$ usi.
3°) Montrer que le moment cinétique **L** de l'électron par rapport au proton est aussi quantifié.
4°) Pour l'hydrogène, K = 13,6 eV. Calculer a_o.
Quelles sont les valeurs possibles pour L ?

R : $E = Ec + Ep = mv^2/2 - e^2/4\pi\varepsilon_o r^2$. En écrivant la RFD, on exprime v, et l'on peut tirer $r = e^2n^2/8\pi\varepsilon_o K$. On a ici : L = mvr, donc $L = nL_1$ avec : L_1 = cste.

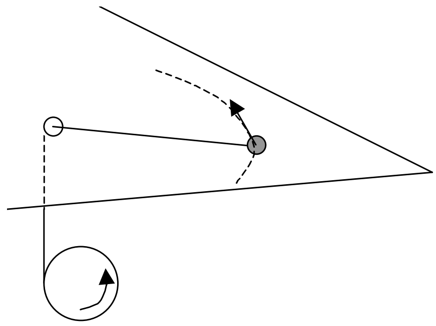
4. force centrale avec frottement :
Un point matériel M de masse m est attiré par un point fixe O en étant soumis à une force d'expression : -K.**OM** (concrètement on peut envisager une force de rappel élastique, le point O correspondant à l'extrémité de l'élastique au repos) et à une force résistante de type visqueux d'expression -h.d(**OM**)/dt.
On pose $K = mk^2$ et $h = 2\lambda m$ pour simplifier les expressions.

a) Montrer qu'en l'absence de poids m**g**, le mouvement serait plan. On suppose pour la suite que la masse m évolue sur un plan horizontal dont la réaction compense le poids m**g**.
b) Exprimer le moment cinétique **L** de M par rapport à O. Montrer qu'il varie en $\exp(-2\lambda t)$.
c) Le point M peut-il tourner autour de O à vitesse angulaire constante ? Exprimer la vitesse angulaire ω correspondante. Etudier brièvement son mouvement en précisant la trajectoire et la façon dont M peut tendre vers O.

*R : (a) montrer la conservation de la <u>direction</u> de **L**. (b) écrire le TMC (c) écrire la RFD.* $\omega = \pm\sqrt{k^2 - \lambda^2}$*, ce qui nécessite* $k > \lambda$*.*
Trajectoire en spirale, avec décroissance exponentielle du rayon avec le temps.

5. Conservation du moment cinétique :

Un point matériel (M, m) est mobile sans frottement sur un plan horizontal percé d'un trou O dans lequel est engagé un fil inextensible.
Ce fil est lié à l'une de ses extrémités à M tandis que l'autre est enroulée sur le tambour d'un treuil. Initialement, le fil est tendu, M est lancée à une vitesse V_O orthogonale à la direction du fil, à une ditance L_o du trou. Le treuil enroule le fil à vitesse constante, sans chevauchement des spires.



(a) Décrire qualitativement le mouvement de M. Etablir une relation entre la longueur r(t) de fil à l'instant t (r(t) = OM) et sa vitesse angulaire ω.
(b) Exprimer la vitesse du mobile M en fonction du temps, son module et l'angle que fait le vecteur vitesse avec la direction orthoradiale.
(c) Donner l'équation polaire de la trajectoire.

R : écrire la conservation du moment cinétique (à partir du TMC). $r(t) = L_o - At$.
$r(\theta) = 2L_o - L_oV_o/A\theta$

6. Oscillateur spatial :

On montre qu'une particule restant au voisinage d'une position d'équilibre stable O peut être modélisée comme un point matériel soumis à une force de rappel d'expression :

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{OM} = -k\,\mathbf{r}.$$

1°) On étudie d'abord le mouvement de la particule, de masse m, pour des conditions initiales quelconques. On note $\mathbf{r}_O$ le vecteur position et $\mathbf{v}_O$ la vitesse initiales. Montrer que le mouvement est plan. On repère par les axes Ox et Oy le plan du mouvement.

On note $\mathbf{r}_O = r_O\,\mathbf{e}_X$ et $\mathbf{v}_O = \alpha\,\mathbf{e}_X + \beta\,\mathbf{e}_Y$. Etablir l'équation du mouvement : $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_o{}^2\vec{r} = \vec{0}$

Déterminer la trajectoire, tracer son allure et préciser l'évolution de la vitesse de la particule.
2°) Examiner le cas particulier où $\mathbf{r}_O.\mathbf{v}_O = 0$; déterminer les valeurs minimale (péricentre) et maximale (apocentre) de r ainsi que la vitesse en ces points.

Vérifier que le mouvement est conforme à la Loi des Aires, s'exprimant ici par : $\vec{r} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{cste}$, ce qui équivaut à la conservation du moment cinétique.
3°) A quelles conditions la trajectoire peut-elle être circulaire ?

R : (1) trajectoire elliptique. $x(t) = r_o\cos\omega_o t + (\alpha/\omega_o)\sin\omega_o t$ *de centre O(0 , 0) ;*
$\dot{y}(t) = \beta\cos\omega_o t$ *(2)* $dS/dt = r_o\beta/2$
(3) $v_o = r_o\omega_o$ *avec* $\mathbf{v}_o$ *orthoradiale.*