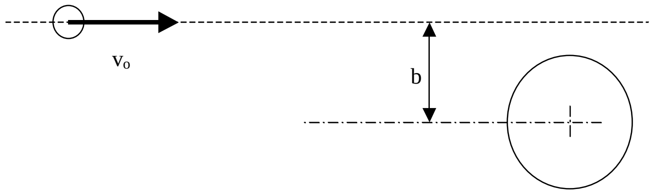
**Théorème du moment cinétique et RFD (Corrigé)**

**1. Expression analytique, mouvement à force centrale :**




Par la loi de Coulomb : $\vec{F} = \dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e_r}$

force centrale répulsive.

Dans un référentiel $R_O$ lié à la particule de centre O, supposé galiléen (cette particule a une masse beaucoup plus forte que le projectile de position P), le TMC donne : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

En effet le moment de la force de Coulomb par rapport à O est nul, puisqu'à tout instant cette force est colinéaire à (OP).Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L_O} = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$. Donc P évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

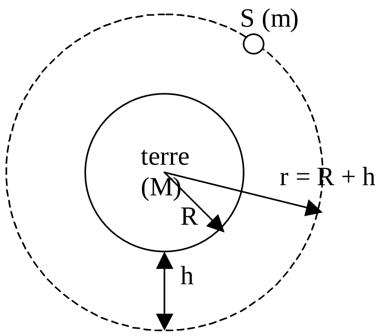
On calcule la valeur du moment cinétique à partir des conditions initiales : $\vec{L_O} = \overrightarrow{OP}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0) = mbvo\overrightarrow{e_z}$

Remarque : on pourrait poursuivre l'étude du mouvement en coordonnées polaires, avec $\vec{L_O} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = mbv_o\overrightarrow{e_z}$ donc : $r^2\dot{\theta} = bv_o =$ cste.

La détermination précise de la trajectoire pourrait se faire ensuite en utilisant l'une des méthodes vues en cours pour le cas des interactions newtoniennes (méthode de Binet, vecteur excentricité…).

La force étant répulsive, on aura un système en état de diffusion, et dans ce cas d'interaction newtonienne, une trajectoire hyperbolique du projectile.

**2. Satellite circulaire :**




Ecrivons le TMC pour S(m), dans le référentiel géocentrique.

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

car la force de gravitation $\vec{F} = \dfrac{-GMm}{r^2}\vec{e_r}$ est radiale donc son moment en O est nul.

Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\overrightarrow{OS}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L_O} = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$. Donc S évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

Le mouvement étant supposé circulaire, le vecteur vitesse est à tout instant orthogonal au vecteur position.

$\vec{L_O} = mr\vec{e_r} \wedge \vec{v} = mrv\overrightarrow{e_z}$ et comme m = cste, r = R + h = cste et $\vec{L_O} = \overrightarrow{cste}$, on aura nécessairement v = cste. Le mouvement est donc uniforme (module de la vitesse invariant).

Pour déterminer ce module v, écrivons la RFD pour S(m), dans le référentiel géocentrique :

$\vec{F} = \dfrac{-GMm}{r^2}\vec{e_r} = m\vec{\gamma}$ où l'accélération s'exprime par : $m\vec{\gamma} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\dfrac{d(v\overrightarrow{e_\theta})}{dt} = -mv\dot{\theta}\vec{e_r}$

avec $\dot{\theta} = v/r$ qui donne donc : $m\vec{\gamma} = -m\dfrac{v^2}{r}\vec{e_r}$

On tire donc de la RFD : $v^2/r = GMm/r^2$ d'où : $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$ AN : $v = v_o = 7{,}92.10^3$ m/s.

La période orbitale s'obtient par : $T = 2\pi(R+h)/v$

soit : $T = T_o = \dfrac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{GM}}$ AN : $T_o$ = 1 h 24 mn en considérant h << R.

**3. Atome de Bohr :**

1°) Par la loi de Coulomb : $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e_r}$ F force centrale.

Dans un référentiel $R_O$ lié à la particule de centre O, supposé galiléen (cette particule a une masse beaucoup plus forte que le mobile de position M), le TMC donne : $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

En effet le moment de la force de Coulomb par rapport à O est nul, puisqu'à tout instant cette force est colinéaire à (OM).Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\vec{OM}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{cste}$. Donc M évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

Le mouvement étant supposé circulaire, le vecteur vitesse est à tout instant orthogonal au vecteur position.

$\vec{L_O} = mr\vec{e_r} \wedge \vec{v} = mrv\vec{e_z}$ et comme m = cste, r = cste et $\vec{L_O} = \vec{cste}$, on aura nécessairement une vitesse de module v = cste. Le mouvement est donc uniforme (module de la vitesse invariant).

2°)Energie mécanique : E = $E_c$ + $E_p$ = $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r}$

Déterminons le carré de la vitesse.

Pour cela, écrivons la RFD pour M(m), dans le référentiel centré sur le proton (supposé galiléen).

$\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e_r} = m\vec{\gamma}$ où l'accélération s'exprime, dans le cas de ce mouvement circulaire, par :

$m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d(v\vec{e_\theta})}{dt} = -mv\dot{\theta}\vec{e_r}$ avec $\dot{\theta} = v/r$ qui donne donc : $m\vec{\gamma} = -m\frac{v^2}{r}\vec{e_r}$

On tire donc de la RFD : $v^2/r = e^2/(m4\pi\varepsilon_o r^2)$ soit finalement : $v^2 = \frac{e^2}{m4\pi\varepsilon_o r}$

On en déduit alors : $E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o r}$ que l'on identifie à $E = -K/n^2$.

Il vient donc une quantification du rayon des trajectoires envisageables : $r = \frac{n^2e^2}{8\pi\varepsilon_o K} = n^2 a_o$

où $a_o = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o K}$ est le rayon de Bohr. AN : $a_o$ = 0,053 nm.

Attention à convertir K = 13,6 eV en Joule : K = 13,6. $1{,}6.10^{-19}$ = $2{,}18.10^{-18}$ J.

$\vec{L_O} = mr\vec{e_r} \wedge \vec{v} = mrv\vec{e_z} = \frac{mre}{\sqrt{m4\pi\varepsilon_o r}}\vec{e_z} = nL_1\vec{e_z}$ avec $L_1 = n\sqrt{\frac{ma_o}{4\pi\varepsilon_o}}$

Le moment orbital $L_O$ est donc lui aussi quantifié par le nombre quantique principal n.

**4. force centrale avec frottement :**

a) Ecrivons le TMC pour M(m), dans le référentiel centré sur O : $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{OM} \wedge \sum\vec{F}$

soit $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{OM} \wedge (-mk^2)\vec{OM} + \vec{OM} \wedge (-2\lambda m)\vec{v} = \vec{0} - 2\lambda\vec{L_O}$

La variation du moment cinétique reste donc colinéaire à celui-ci, ce qui signifie qu'il conserve une direction invariante (même si sa norme va changer).

Le vecteur position $\vec{OM}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$. Donc M évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur de direction fixe, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

b) Projetons le TMC sur l'axe portant $\overrightarrow{L_O}$ . Il vient : $\dfrac{dL_O}{dt} = -2\lambda L_O$

qui s'intègre en : $L_O(t) = L_O(0).\exp(-2\lambda t)$.

c) Si on suppose : $\dot{\theta}$ = ω = cste, il faut cependant satisfaire à la loi précédente. En exprimant le moment cinétique en coordonnées polaires : $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$

il vient : $r^2 = \dfrac{L_O(0)}{m\omega}\exp(-2\lambda t)$ soit : $r = \sqrt{\dfrac{L_O(0)}{m\omega}}\exp(-\lambda t)$

associé à la loi horaire : $\theta(t) = \omega.t + cste$ donc t = $(\theta - \theta_o)/\omega$.

On a pour trajectoire une spirale logarithmique, d'équation polaire : $r = \sqrt{\dfrac{L_O(0)}{m\omega}}\exp(-\dfrac{\lambda}{\omega}(\theta - \theta_o))$ .

On cherche une condition permettant de remonter aux valeurs possibles pour la vitesse angulaire ω.
Ecrivons la RFD.
L'accélération peut préalablement être exprimée en coordonnées polaires :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\omega\overrightarrow{e_\theta})$$ vues les hypothèses faites sur le mouvement.

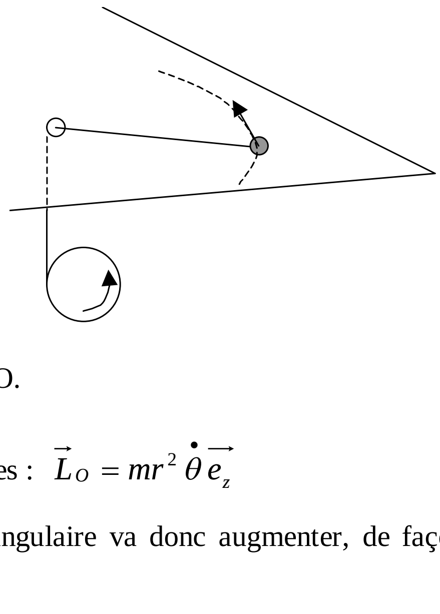
Soit : $\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\omega^2)\overrightarrow{e_r} + 2\dot{r}\,\omega\overrightarrow{e_\theta}$

La RFD, projetée sur la direction radiale, conduit donc à : $m(\ddot{r} - r\omega^2) = -mk^2 r - 2\lambda m\dot{r}$ (1)

et sa projection sur la direction orthoradiale fournit : $2m\dot{r}\,\omega = -2\lambda r\omega$ (2)

L'équation (2) s'intègre en amenant le même résultat que celui tiré du TMC : $r = r(0).\exp(-\lambda t)$.
En injectant cette expression de r(t) dans l'équation (1) on tire après simplifications :
$\omega^2 = k^2 - \lambda^2$ soit : $\omega = \pm\sqrt{k^2 - \lambda^2}$ valide à condition d'avoir k > λ.
Le signe de ω correspond au sens d'enroulement de la trajectoire en spirale.

**5. Conservation du moment cinétique :**



(a) M est lancé à fil tendu. L'action du treuil raccourcit progressivement la distance r = OM, linéairement dans le temps.
Ecrivons le TMC en O :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{g} + \vec{R}) = \vec{0}$$

La conservation du moment cinétique confirme un mouvement plan : le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$. Donc M évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur de direction fixe, passant par O.

De plus, en explicitant le moment cinétique en coordonnées polaires : $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$

Il vient : $\dot{\theta} = \dfrac{L_O}{mr^2}$. A mesure que r va décroître, la vitesse angulaire va donc augmenter, de façon à maintenir $L_O$ = cste.

b) Le treuil enroulant le fil à vitesse constante, la valeur de r évolue selon : $r(t) = r_o - A.t$

D'après ce qui précède, on aura donc : $\dot{\theta} = \dfrac{L_O}{m(r_o - A.t)^2}$ où $L_O = mr_o.v_o$

soit : $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{r_o v_o}{(r_o - A.t)^2}$ qui s'intègre par rapport au temps en donnant la loi horaire sur θ(t) :

$$\theta(t) = \frac{1}{A}\frac{r_o v_o}{r_o - A.t} + cste$$

La vitesse du mobile sera : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = -A\vec{e_r} + \frac{r_o v_o}{r_o - A.t}\vec{e_\theta}$

c) On explicite l'équation polaire r(θ) en éliminant le temps dans le système d'équations paramétrées : r(t) = $r_o$ – A.t ; $\theta(t) = \frac{1}{A}\frac{r_o v_o}{r_o - A.t}$+cste. Posons θ(0) = 0, et donc cste = -$v_o$/A.

Il vient : $\theta(r) = \frac{1}{A}\frac{r_o v_o}{r} - \frac{v_o}{A}$ et donc : $r(\theta) = \frac{r_o v_o}{A.\theta + v_o}$

**6. Oscillateur spatial :**

1°) Ecrivons le TMC pour M(m), dans le référentiel lié à O, galiléen. $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

car la force de rappel $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -k\vec{r} = -kr\vec{e_r}$ est radiale donc son moment en O est nul.
Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$. Donc M évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

Ecrivons la RFD pour M(m) : $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$ donne : $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_o{}^2\vec{r} = \vec{0}$ en posant : $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

La projection de la RFD sure les axes (Ox) et (Oy) conduit aux équations :

$\ddot{x} + \omega_o{}^2 x = 0$ et $\ddot{y} + \omega_o{}^2 y = 0$

Les conditions initiales de position et vitesse imposent : $\vec{r_o} = x_o\vec{e_x} + y_o\vec{e_y} = r_o\vec{e_x}$

et $\vec{v_o} = \dot{x}_o\,\vec{e_x} + \dot{y}_o\,\vec{e_y} = \alpha\vec{e_x} + \beta\vec{e_y}$

La résolution du système des équations différentielles munies de leurs conditions initiales amène finalement : $x(t) = x_o \cos\omega_o t + \frac{\alpha}{\omega_o}\sin\omega_o t$ et $y(t) = \frac{\beta}{\omega_o}\sin\omega_o t$

La trajectoire sera donc une ellipse (non droite pour α non nul), dont le centre est O.
Le vecteur vitesse se calcule par dérivation temporelle.
2°) Pour α = 0, les vecteurs position initiale et vitesse initiale sont orthogonaux.

On obtient d'après le 1°) : $x(t) = x_o \cos\omega_o t$ et $y(t) = \frac{\beta}{\omega_o}\sin\omega_o t$

et pour les coordonnées du vecteur vitesse : $\dot{x}(t) = -x_o\omega_o \sin\omega_o t$ et $\dot{y}(t) = \beta\cos\omega_o t$

Le péricentre correspond à la valeur minimale de la distance entre le centre O de l'ellipse $\beta/\omega_o$ , alors v = $x_o.\omega_o$ est maximal.
L' apocentre correspond à la valeur maximale de la distance entre le centre O de l'ellipse $r_o$ , alors
v = β est minimal.
La conservation du moment cinétique, montrée plus haut impose en effet que :

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{cste} = \beta.x_o\vec{e_z}$

3°) Il fait : $v_o = r_o\omega_o$ avec $\mathbf{v}_o$ orthoradiale. Trajectoire circulaire pour $\beta/\omega_o = x_o = r_o$ soit donc pour β = $r_o.\omega_o$.