Mouvement d'une particule chargée
dans un champ électrique et magnétique uniformes et indépendants du temps.

Mouvement dans le vide, en mécanique classique :

1. Particule chargée dans des champs croisés :

Une particule de masse m, de charge électrique q est introduite sans vitesse initiale à l'origine O d'un référentiel galiléen (O, x, y, z). Dans l'espace règnent un champ électrostatique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ uniformes et constants, portés respectivement par les axes (Oy) et (Oz). Déterminer la trajectoire.

R : Appliquer la R.F.D. que l'on intègre. (Introduire la variable complexe **r** *= x + jy).*
D'où, en posant $\omega = qB/m$: $x = (E/B)t - (E/\omega B).\sin\omega t$ et $y = (E/\omega B)(1-\cos\omega t)$ (cycloïde).

2. Particules chargées dans des champs parallèles :

Dans l'espace rapporté à un repère galiléen (O, x, y, z) sont établis le champ électrique $\vec{E} = E\vec{e_y}$ et le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_y}$, colinéaires. Une particule de masse m et de charge q est introduite en O avec le vecteur vitesse $\vec{v_o} = v_o\vec{e_x}$. Décrire la trajectoire. Pendant quelle durée l'étude conduite en mécanique classique reste-t-elle valide ?

R : Appliquer la R.F.D. que l'on projette. En notant $\omega = qB/m$ on trouve d'abord $\dot{x} = -\omega z + a$; $\dot{y} = qEt/m$ et $\dot{z} = \omega x + b$ (a et b constantes).
et finalement : $x = (v_O/\omega) \sin\omega t$; $y = qEt^2/2m$ et $z = (v_O/\omega).(1-\cos\omega t)$.
La courbe décrite est une "hélice" de pas variant comme t^2, tracée sur un cylindre d'axe parallèle à (Oy) de rayon mv_O/qB.
Les résultats obtenus ne sont plus valides à partir de $v > 0{,}1.c$ ($c = 3.10^8$ m/s)).
Il faut alors employer les équations de la mécanique relativiste.

3. Magnétron :

Des électrons de charge électrique q et de masse m, sont émis sans vitesse initiale par effet thermoélectrique en un point d'un filament cylindrique d'axe (Oz), de rayon r_O et porté au potentiel 0. Ils sont alors soumis d'une part au champ électrique radial $\vec{E}$ créé entre le filament et une électrode cylindrique d'axe (Oz), de rayon $R > r_O$, portée au potentiel V_O, d'autrepart au champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{e_z}$.

(a) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique en projection sur la base associée aux coordonnées cylindriques (r, θ, z) autour de (Oz). En déduire que la trajectoire des électrons est plane et former une relation entre r, $\dot{\theta}$, r_O, q, m et B.
(b) On admet que le potentiel électrostatique est donné par l'expression : $V(r) = \dfrac{V_o}{Ln\dfrac{R}{r_o}} Ln\dfrac{r}{r_o}$

Ecrire l'intégrale de l'énergie mécanique.

En déduire la valeur du champ magnétique B juste nécessaire pour empêcher les électrons d'atteindre le cylindre de rayon R.

R : (a) la RFD (ou le TMC) amène notamment une équation de forme : $2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}=-q\dot{r}B/m$, qui s'intègre en $r^2\dot{\theta}=-(qB/2m)(r^2-r_o^2)$

(b) *Ecrire la cons° de E. r•=0 pou r = $r_{max.}$ r_{max} = R mène à :* $B = \dfrac{2\sqrt{\dfrac{-2mV_o}{q}}}{R\left(1 - \dfrac{r_o^{\,2}}{R^2}\right)}$

<u>Mouvement dans un métal :</u>

Conductibilité électrique des métaux, résistance d'un conducteur :

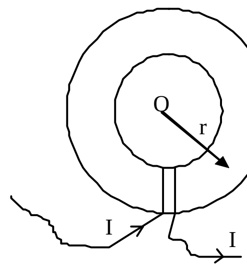
4. Résistance d'une prise de terre. Conductibilité du sol :

1°) Calculer la résistance de fuite entre les armatures d'un condensateur sphérique, constitué de deux électrodes sphériques concentriques, de rayons r et r' (r' > r), séparées par un "mauvais" isolant , de conductivité γ.
2°) Retrouver ce résultat en utilisant les lois d'association de résistances.
3°) Application : une prise de terre,constituée d'une électrode sphérique métallique, de rayon r = 5 cm, enfouie profondément dans le sol (mauvais isolant). On mesure entre l'électrode et le sol une résistance d'isolement R = 1000 Ω. En déduire la conductivité γ du sol.

R : 1°) $R = \dfrac{1}{4\pi\gamma}\dfrac{r'-r}{rr'}$ *2°) en envisageant l'isolant comme formé d'un empilement de couches sphériques élémentaires, de résistance dR = "ρ.l / S" = (1/γ). dr / 4πr² ;*
R = ∫dR. 3°) γ = 1/(4π r R)

5. Résistance d' un anneau épais :

On considère une rondelle conductrice de conductivité γ, de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2. On note e son épaisseur. On découpe cette rondelle radialement et l'on relie chaque surface de part et d'autre de l'entaille par un circuit électrique.
On admet que les lignes de champ sont alors circulaires, et que le champ électrique dans l'anneau ne dépend que de la distance à l'axe r.
Déterminer l'expression de la résistance R de cette rondelle.



R : La tension U entre les deux entailles est la circulation du champ.
U = 2πr.E(r).
On en déduit j(r) = E(r) / γ. I est le flux de j(r) à travers une section (radiale).
R = U /I =2π / γ.e.ln(R_2 / R_1).

Effet Hall :

6. Effet Hall dans un cylindre tournant :

Dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_z}$, on place un cylindre formé d'une tôle métallique d'épaisseur d, de rayon moyen R dont l'axe est parallèle à $\vec{B}$.
On fait tourner ce cylindre à la vitesse angulaire constante ω autour de son axe. Calculer la différence de potentiel U_H qui apparaît alors entre les deux faces du cylindre.
On supposera d'emblée d << R.

R : $U_H = R\omega.d.B$

7. Conductibilité d'un métal dans un champ magnétique. Effet Hall :

Un ruban plat en argent, de faible épaisseur a, de largeur l, de conductibilité γ_0, soumis à un champ électrique $\vec{E}$, est parcouru par un courant électrique d'intensité I, constante, de densité j, obéissant à la loi d'Ohm (locale).

Ce courant est dû au déplacement des électrons libres, de charge q, de densité volumique N. Les "chocs" qu'ils subissent sur les défauts du réseau cristallin métallique sont équivalents à une force de frottement fluide d'expression f = -k v (où k > 0, et v est la vitesse des électrons)

Données numériques : $q = -1{,}6.10^{-19}$ C ; $k = 2{,}4.10^{-17}$ Ns/m ; a = 0,5 mm

1°) On plonge le ruban dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

Montrer que la loi d'Ohm doit être remplacée par l'expression :

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma_0}\vec{j} + R_H \times \vec{B} \wedge \vec{j}$$

On exprimera γ_0 et R_H, la "constante de Hall" en fonction de k, N, et q.

2°) On suppose $\vec{B} = B\vec{e_z}$ dirigé suivant la normale au plan du ruban.

a) Montrer que les lignes de champs électrique et de courant font un angle θ, que l'on exprimera en fonction de B, k, et q ; puis en fonction de B, γ_0, et R_H.

Calculer θ pour B = 13 T.

b) Exprimer la différence de potentiel Hall U_H qui apparaît entre les deux bords du ruban en fonction de a, B, I, N et q.

c) Calculer la densité N des porteurs et la conductivité γo de l'argent, sachant que pour B = 13 T et I = 5 A, on obtient : $|U_H| = 13{,}6\ \mu$V.

3°) a) On définit la conductivité apparente γ du matériau comme le coefficient qui relie le champ électrique et la composante du vecteur densité de courant qui lui est colinéaire.

Montrer qu'en présence du champ B, la conductivité du métal devient :

$\gamma = \gamma o/ (1+ \alpha^2 B^2)$ où α sera exprimé en fonction de k,et q.

b) Calculer la diminution relative de conductivité en présence d'un champ magnétique très intense tel que : B = 40 T. (les champs magnétiques rencontrés en TP sont de l'ordre de la dizaine de mT).

R : 1°) écrire la R.F.D. pour un porteur $\vec{j} = Nq\vec{v}$, avec $\vec{v}$ = cste en régime permanent.

2°) a) Les lignes de courant sont dirigées dans le sens de la longueur du ruban. $\vec{E}$ se décompose en deux composantes, correspondant respectivement à la longueur du ruban et à sa largeur. $tg\theta = (q/k)\ B$;

b) $U_H = BI/aNq$ par le calcul de la circulation de $\vec{E}$ d'un bord à l'autre du ruban ;
c) $\gamma o = Nq^2/k$ 3°) a) $\alpha = q/k$; b) 7%.

Forces de Laplace

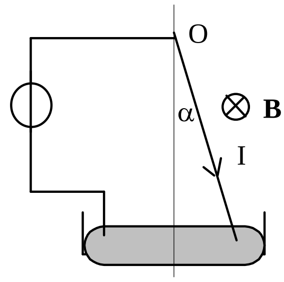
8. Barre conductrice sur deux rails parallèles :

Deux rails parallèles sont disposés dans un plan faisant un angle α avec l'horizontale, à une distance a l'un de l'autre. Dans ce plan, on crée un circuit électrique en posant une tige cylindrique conductrice en contact avec les deux rails, et en fermant le tout sur un générateur. Le circuit est alors parcouru par un courant d'intensité I et se trouve plongé dans un champ magnétique vertical, d'intensité B. On note m la masse de la tige.

1°) Faire un schéma clair du dispositif, et préciser le sens du courant qui doit parcourir la tige pour qu'elle reste en équilibre sous l'action du champ de pesanteur, des forces de Laplace et de la réaction des rails.
2°) Calculer l'intensité I permettant alors à la tige de rester en équilibre.

R : $I = mg.\tan\alpha/Ba$

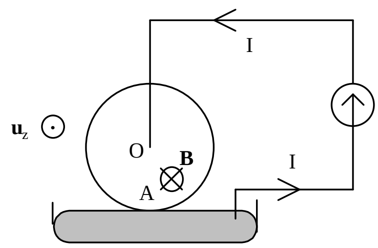
9. Pendule magnétostatique :



On envisage un conducteur filiforme rigide et homogène de longueur l, de masse m, mobile autour d'un axe horizontal perpendiculaire au fil à l'une de ses extrémités.
L'autre extrémité affleure dans du mercure contenu par une cuve. Un courant I traverse le fil.
Le fil est placé dans un champ magnétique uniforme, perpendiculaire au plan de la figure.
Calculer l'angle d'inclinaison α du fil à l'équilibre.

R : Calculer le moment en O du poids : - $mg.l.\sin\alpha/2$, et celui des forces de Laplace $IBl^2/2$.
$\alpha_{éq} = \arcsin(IB.l / mg)$

10. Etude de la roue de Barlow :



La roue de Barlow est un mince disque métallique d'axe (Oz) et de rayon a. Un courant continu d'intensité I entre dans la roue au niveau de son centre O et ressort par le point inférieur A de la roue où celle-ci plonge dans un bain de mercure.

La partie inférieure est placée dans l'entrefer d'un gros aimant en "U" ; on modélise le champ magnétique créé dans cette région comme un champ uniforme, orthogonal à la roue et dirigé comme indiqué sur le schéma. $\vec{B} = -B\vec{e_z}$. (B > 0). On décrira la position d'un point de la roue par ses coordonnées polaires (r, θ).

1°) On modélise d'abord le passage du courant électrique dans la roue comme se faisant le long du rayon OA. Analyser qualitativement l'action des forces de Laplace et prédire le sens de rotation qu'elles impliquent. Calculer leur moment M_{Oz} par rapport à l'axe (Oz).

2°) Dans la réalité, le courant n'est pas concentré le long de OA mais se répartit en "filets de courant" sur la surface de la roue. Reprendre le calcul de M_{Oz} en commençant par calculer la contribution dM_{Oz} d'un filet de courant transportant l'intensité dI.

R : $M = IBa^2/2$.