Mouvement d'une particule chargée
dans un champ électrique et magnétique uniformes et indépendants du temps.
(Correction des exercices)

Mouvement dans le vide, en mécanique classique :

1. Particule chargée dans des champs croisés :

Le système est évidemment la particule chargée de charge q et de masse m. Le référentiel est celui d'observation, supposé galiléen.
Les forces appliquées se réduisent à la force de Lorentz, d'expression : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$. Le poids est négligé.
On a $\vec{E} = E\vec{e_y}$ et $\vec{B} = B\vec{e_z}$. La force de Lorentz n'a donc pas de composante colinéaire à $\vec{e_z}$ puisque le terme électrique est porté par $\vec{e_y}$ et que, d'après la définition du produit vectoriel, le terme magnétique est orthogonal à $\vec{e_z}$.
Le profection de la R.F.D. : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ sur la direction de (Oz) conduit donc à $\ddot{z} = 0$.
Par une première intégration, on a donc $\dot{z} = cste = 0$ vue la condition initiale sur la vitesse ; puis $z = cste = 0$ vue celle sur la position.
Le mouvement se déroule donc intégralement dans le plan (Oxy).
Explicitons la RFD sur la base cartésienne :

$$\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} + \frac{q}{m} \begin{vmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} B\dot{y} \\ E - B\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

posons : ω = qB/m

On doit donc résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = \omega \dfrac{E}{B} - \omega \dot{x} \end{cases}$

En intégrant, et en tenant compte que la vitesse initiale est nulle : $\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = \omega \dfrac{E}{B} t - \omega x \end{cases}$

On peut alors intégrer le système en posant : X = x + i.y ($i^2 = -1$).
Le système devient une équation unique sur la variable complexe X : $\dot{X} + i\omega.X = i\omega\dfrac{E}{B}t$ (1)
Solution générale de l'équation sans second membre : $X_1 = A\exp\left(-i\omega t\right)$ où A est une constante d'intégration.
Solution particulière de l'équation complète : de forme $X_2 = \lambda t + \mu$ avec par identification dans l'équation (1) : $X_2 = \dfrac{E}{B}t + i\dfrac{E}{B\omega}$

En faisant jouer la condition initiale sur la position, cela impose X(0) = 0 pour la solution générale de l'équation complète : $X = X_1 + X_2 = A\exp\left(-i\omega t\right) + \frac{E}{B}t + i\frac{E}{B\omega}$

soit donc $A + i\frac{E}{B\omega} = 0$

D'où finalement en séparant partie réelle (x) et imaginaire (y) :

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{E}{B\omega}\sin\omega t$$
$$y = \frac{E}{B\omega}\left(1-\cos\omega t\right)$$

cette trajectoire est une cycloïde.

2. Particules chargées dans des champs parallèles :

Le système est évidemment la particule chargée de charge q et de masse m. Le référentiel est celui d'observation, supposé galiléen.

Les forces appliquées se réduisent à la force de Lorentz, d'expression : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$. Le poids est négligé.

On a $\vec{E} = E\overrightarrow{e_y}$ et $\vec{B} = B\overrightarrow{e_y}$.

Explicitons la RFD sur la base cartésienne :

$$\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \frac{q}{m}\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{q}{m}\begin{vmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{q}{m}\begin{vmatrix} -B\dot{z} \\ E \\ B\dot{x} \end{vmatrix}$$

posons : ω = qB/m

On doit donc résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega\dot{z} \\ \ddot{z} = \omega\dot{x} \end{cases}$

auquel s'adjoint l'équation différentielle indépendante : $\ddot{y} = \omega\frac{E}{B} = \frac{qE}{m}$

Cette dernière équation s'intègre en deux intégrations temporelles, et compte tenu des conditions initiales en vitesse et position en : $y(t) = \omega\frac{E}{B}\frac{t^2}{2} = \frac{qE}{m}\frac{t^2}{2}$

Le système peut se résoudre en introduisna tla variable complexe : X = x + i.z.

Il vient en additionnant la première équation du système à la seconde, après avoir multiplié celle-ci par i : $\ddot{X} = i\omega\dot{X}$

Cette équation s'intègre un première fois en : $\dot{X} = i\omega X + V_o$ vues les conditions initiales amenant $\dot{X}(0) = V_o$ et $X(0) = 0$.

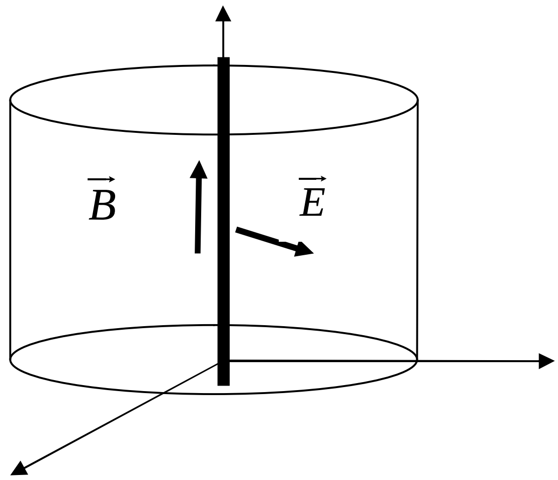
Une seconde intégration amène : $X(t) = X_o\exp(i\omega t) - \frac{V_o}{i\omega}$.

La condition initiale $X(0) = 0$ impose $X_o\exp(i\omega t) = \frac{V_o}{i\omega} = -i\frac{V_o}{\omega}$

On déduit donc finalement : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{V_o}{\omega}\sin \omega t \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m} t^2 \\ z(t) = \dfrac{V_o}{\omega}(1-\cos \omega t) \end{cases}$

La courbe décrite est une "hélice" de pas variant comme t², tracée sur un cylindre d'axe parallèle à (Oy) de rayon mV_0/qB. Les résultats obtenus ne sont plus valides à partir de v > 0,1.c (c = 3.10^8 m/s)). Il faut alors employer les équations de la mécanique relativiste.

3. Magnétron :



(a) RFD : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

Relation que l'on va projeter sur la base cylindro-polaire. En ayant préalablement établi l'expression de l'accélération sur ce système de coordonnées, il vient :

$$\begin{cases} m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = q\left(E + r\dot{\theta}B\right) \\ m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = -q\dot{r}B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

La dernière équation, après deux intégrations et vues les conditions initiales du mouvement, amène z = cste. La trajectoire sera plane, située dans un plan orthogonal au filament.
La seconde équation du système va se résoudre en la multipliant par r. Elle apparaît alors comme de forme : $\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = -\dfrac{q}{m}B\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{r^2}{2}\right)$

Vue les conditions initiales : $\dot{\theta}(0) = 0$ et r(0) = r_o, on en déduit en intégrant l'expression précédente entre 0 et t : $r^2\dot{\theta} = -\dfrac{q}{m}B\left(\dfrac{r^2}{2} - \dfrac{r_o^2}{2}\right)$

(b) L'énergie mécanique d'un électron est constante dans ce mouvement conservatif.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + qV(r)$$

Ayant à l'état initial : v = 0 et r = r_o on en déduit que E = 0.

La question précédente a fourni : $\dot{\theta} = -\dfrac{q}{2m}B\left(1 - \dfrac{r_o^2}{r^2}\right)$

et le sujet donne

$$V(r) = \frac{V_o}{Ln\dfrac{R}{r_o}} Ln\frac{r}{r_o}$$

Il vient donc : $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + r^2\frac{q^2B^2}{8m}\left(1-\frac{r_o^2}{r^2}\right) = -\frac{2q}{m}q\frac{V_o}{Ln\frac{R}{r_o}}Ln\frac{r}{r_o}$

A partir de r_o, le rayon r ne peut qu'augmenter durant la première phase du mouvement ; on a donc $\dot{r} > 0$. Quand $\dot{r} = 0$, ceci correspond à $r = r_{max}$.

De l'équation précédente, on tire $+r_{max}^2\frac{q^2B^2}{8m}\left(1-\frac{r_o^2}{r_{max}^2}\right) = -\frac{2q}{m}q\frac{V_o}{Ln\frac{R}{r_o}}Ln\frac{r_{max}}{r_o}$ (1)

Pour avoir $r_{max} = R$, il suffit d'injecter cette condition dans (1)

ce qui mène à : $B = \frac{2\sqrt{\frac{-2mV_o}{q}}}{R\left(1-\frac{r_o^2}{R^2}\right)}$

<u>Mouvement dans un métal :</u>

Conductibilité électrique des métaux, résistance d'un conducteur :

4. Résistance d'une prise de terre. Conductibilité du sol :

1°) Le vecteur densité de courant est à symétrie sphérique : $\vec{j} = j(r)\vec{e_r}$

L'intensité I qui traverse une section S du condutcteur, c'est-à-dire une sphère de rayon r, d'aire πr^2, correspond au flux de $\vec{j} = j(r)\vec{e_r}$ soit : $I = \iint j(r)\vec{e_r} \bullet dS\vec{e_r} = j(r).4\pi r^2$

On a donc : $j(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$

Le champ électrique est colinéaire au vecteur densité de courant d'après la loi d'Ohm : $\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{j} = \frac{1}{\gamma}j(r)\vec{e_r} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2}\vec{e_r}$

Sa circulation correspond à la tension U, différence de potentiel entre les deux électrodes de rayons respectifs r_1 et r_2 : $U = \int_{r_1}^{r_2}\frac{I}{4\pi\gamma r^2}\vec{e_r} \bullet dr\vec{e_r} = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

La résistance de fuite est donc R = U/I soit : $R = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$

2°) Un résistor de forme cylindrique répond à la formule : $R = \rho.l / S$. En envisageant l'isolant comme formé d'un empilement de couches sphériques élémentaires, d'épaisseur dr, de section $4\pi r^2$, de résistance $dR = (1/\gamma).\,dr / 4\pi r^2$ (expression formée par analogie), il vient en sommant les résistances élémentaires : $R = \int dR. = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$

3°) On se retrouve dans la situationdu 1°) en considérant que $r_2 \rightarrow \infty$;

On a donc : $R_o = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{1}{r_1}$ dont on tire $\gamma = 1/(4\pi\ r_1\ R)$. AN : $\gamma = 1{,}6.10^{-3}\ S.m^{-1}$.
(valeur très faible, c'est un isolant !)

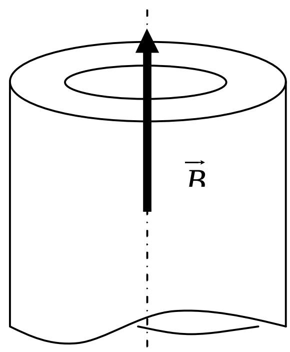
5. Résistance d' un anneau épais :

1°) Vue la géométrie du problème, le champ électrique dans l'anneau ne va dépendre que du rayon r, et les lignes de champ sont orthoradiales $\vec{E} = E(r)\vec{e}_\theta$. La densité de courant $\vec{j} = j(r)\vec{e}_\theta$ aura la même géométrie ; les lignes de courant seront orthoradiales .
La loi d'Ohm impose la relation j(r) = γ.E(r). Sous forme macroscopique elle s'écrit : U = R.I où U est la tension, circulation du champ électrique $\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\vec{j} = \rho\vec{j}$ sur toute la longueur du conducteur (c'est-à-dire ici le long d'un cercle de rayon r) et I est l'intensité, correspondant au flux du vecteur densité de courant à travers une section du conducteur, d'épaisseur e et de largeur 2a (entre les valeurs R_1 et R_2).
La circulation du champ électrique $\vec{E} = \rho\vec{j}$ s'écrit, sur une cercle de rayon $R_1 < r < R_2$:
$U = \int \vec{E} \bullet \overrightarrow{dl} = \int E(r)\overrightarrow{e_\theta} \bullet r.d\theta\overrightarrow{e_\theta} = 2\pi r E(r)$ donc E(r) = U/(2πr).

Pour le calcul de l'intensité I, l'intégration est conduite sur des couronnes circulaires de rayon compris entre r et r + dr et d'épaisseur e, donc de section dS = e.dr
$$I = \iint \vec{j} \bullet \overrightarrow{dS} = \int_{R_1}^{R_2} j(r).e.dr = \int_{R_1}^{R_2} \gamma \frac{U}{2\pi r}.e.dr$$
On peut alors calculer : $I == \gamma \frac{U}{2\pi} e.\ln\frac{R_2}{R_1}$
D'où finalement : $R = U/I = 2\pi / (\gamma.e.\ln(R_2 / R_1))$.

Effet Hall :

6. Effet Hall dans un cylindre tournant :
Le cylindre tournant est équivalent à un courant de direction orthogonale à l'axe du cylindre.
En effet, considérons les électrons libres présents dans le métal. Comme leur nom l'indique, ces électrons n'étant pas liés à un atome particulier, ils peuvent voir leur position statistiquement modifiée s'ils sont soumis à une action.
Sur une charge q = -e s'exerce la force de Lorentz $\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$



Les électrons étant soumis au champ magnétique dirigé selon l'axe du cylindre et animés d'une vitesse orthoradiale, ils vont subir une force magnétique radiale, dirigée vers l'axe, de module F = e.v.B.
Il y a accumulation d'électrons sur la face interne du cylindre et défaut d'électrons sur sa face externe.

Ces accumulation de charges amènent la création d'un champ électrique de Hall $\overrightarrow{E_H}$ au sein du métal, dirigé de la face externe vers la face interne, qui va avoir pour effet de contrer l'action des forces magnétiques par la force électrique $\vec{F} = -e\overrightarrow{E_H}$.

Après une phase transitoire très brève, pendant laquelle l'accumulation de charge se constitue, on arrive à une situation d'équilibre où : $\vec{F} + \vec{F}_{mag} = -e\overrightarrow{E_H} - e\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.
Soit, en écrivant l'égalité des modules de ces forces : e.v.B = e.E_H avec $E_H = U_H/d$.
On a donc pour tension de Hall : U_H = d.v.B

La vitesse v due à la rotation du cylindre valant v = Rω, il vient finalement U_H = R.ω.d.B
A.N. : $U_H = 1{,}047.10^{-3}$ V ≈ 1 mV.

7. Conductibilité d'un métal dans un champ magnétique. Effet Hall :

1°) Ecrivons la R.F.D. pour un porteur de charge : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} - k\vec{v}$

En régime permanent, on aura $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ et une densité de courant : $\vec{j} = Nq\vec{v}$ invariante puisque la vitesse ne varie pas.

On en déduit : $\vec{E} = -\vec{v} \wedge \vec{B} + k\vec{v} = -\dfrac{1}{Nq}\vec{j} \wedge \vec{B} + \dfrac{k}{Nq^2}\vec{j}$

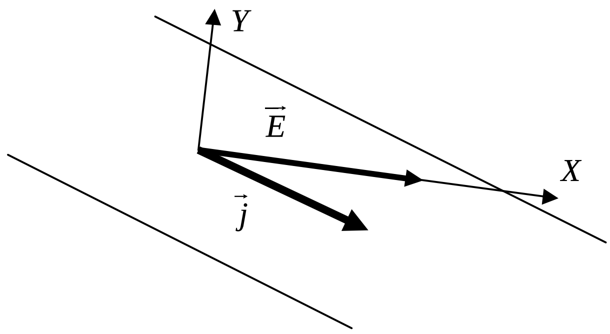
Le champ électrique se met donc sous la forme : $\vec{E} = R_H\left(\vec{B} \wedge \vec{j}\right) + \dfrac{1}{\gamma_o}\vec{j}$

avec par identification : $R_H = 1/Nq$ et $\gamma_o = Nq^2/k$.

2°) a) Les lignes de courant sont dirigées dans le sens de la longueur du ruban. Le champ électrique se décompose en deux composantes, correspondant respectivement à la longueur du ruban (colinéaire à $\vec{j}$) et à sa largeur (orthogonale à $\vec{j}$). Ces composantes ont donc respectivement pour module $E_{//} = j/\gamma_o$ et $E_\perp = R_H.B.j$.
On en déduit : $\tan\theta = E_\perp / E_{//} = \gamma_o.R_H.B = (q/k)\ B$;
b) La tension de Hall est la circulation entre les deux bords du ruban, en ne considérant que le terme $E_\perp = R_H.B.j$. Il vient : $U_H = BI/aNq$
c) La densité des porteurs est : $N = (BI)/(aqU_H)$ AN : $N = 5{,}97.10^{28}$ $éléc.m^{-3}$.
$\gamma_o = Nq^2/k$ donne alors $\gamma_o = 6{,}4.10^7\ S.m^{-1}$.

3°) a) On définit la conductivité γ par la loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. Mais en présence du champ magnétique, le champ électrique n'est plus colinéaire au vecteur densité volumique de courant, puisque :

$\vec{E} = R_H\left(\vec{B} \wedge \vec{j}\right) + \dfrac{1}{\gamma_o}\vec{j}$. (1)



Projetons cette relation sur une base $\left(\overrightarrow{e_X}, \overrightarrow{e_Y}\right)$ où $\overrightarrow{e_X}$ est colinéaire à $\vec{E}$. On décompose donc : $\vec{j} = j_X\overrightarrow{e_X} + j_Y\overrightarrow{e_Y}$ (avec $j_Y < 0$)

La projection de (1) donne deux équations : $E = R_H B.j_Y + \frac{1}{\gamma_o} j_X$ et $0 = R_H B.j_X + \frac{1}{\gamma_o} j_Y$

ce qui fournit : $j_Y = -\gamma_o R_H B.j_X$ et donc $E = \frac{1}{\gamma_o} j_X \left(1+\gamma_o{}^2 R_H{}^2 B^2\right)$

La loi d'Ohm peut donc être remplacée dans cette situation par une relation entre la norme E du champ électrique et la composante j_X selon $E = \frac{1}{\gamma} j_X$

avec $\gamma = \frac{\gamma_o}{1+\gamma_o{}^2 R_H{}^2 B^2}$ de forme $\gamma = \frac{\gamma_o}{1+\alpha^2 B^2}$ en posant $\alpha = R_H \gamma_o = q/k$.

b) Pour B = 21 T, avec α = q/k = $6{,}67.10^{-3}$usi on obtient γ = 0,98 γ_o soit un écart de 2 %.
Pour B = 40 T, le même calcul amène un écart de 7 %.

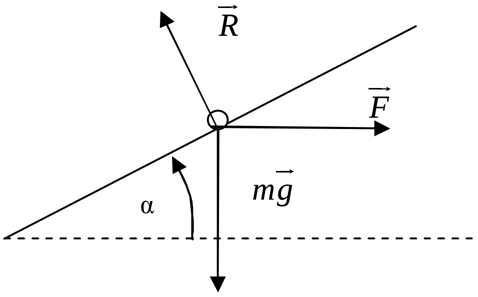
Forces de Laplace

8. Barre conductrice sur deux rails parallèles :

1°) La force de Laplace se calcule par $\vec{F} = \int_{barre} I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$. Cette force sera ici horizontale (et orthogonale à la barre). Son module est F = IBa.

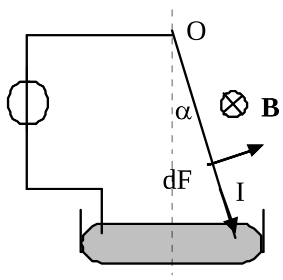
2°) La R.F.D., dans cette situation d'équilibre,s'écrit : $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$.

La réaction est supposée orthogonale aux rails.



La projection sur la direction des rails donne : F.cosα = mg.sinα
d'où I = mg.tanα/Ba

9. Pendule magnétostatique :



L'équilibre de la barre s'obtient par la nullité des actions qu'elle subie. Ceci demande une résultante de sforces nulle (ce qui déterminera la réaction du support au niveau du point O) et la nullité des moments des forces (Théorème du Moment Cinétique).

Calculons le moment en O du poids : le poids peut être considéré comme s'exerçant en G, centre d'inertie de la barre.

La projection du moment sur l'axe orthogonal à la figure est M_{mg} = - mg.l.sinα /2

Le moment des forces de Laplace demande au préalable d'évaluer la force de Laplace élémentaire subie par un élément de courant positionné en un point P de la barre.

$\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$ s'écrit sur la base orthonormée$\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\alpha}, \vec{u}\right)$, où $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP}$:

$\overrightarrow{dF} = Idr\overrightarrow{e_r} \wedge \left(-B\right)\vec{u} = IBdr\overrightarrow{e_\alpha}$ en notant $r = OP$.

Le moment en O de cette force est : $\overrightarrow{dM_O} = OP\overrightarrow{e_r} \wedge dF\overrightarrow{e_\alpha} = IBrdr\vec{u}$

On déduit alors par intégration : $\overrightarrow{M_O} = \displaystyle\int_{barre} \overrightarrow{dM_O} = \int_0^l IBrdr\vec{u} = IB\frac{l^2}{2}$

L'équilibre est obtenu pour : $IB\dfrac{l^2}{2} - mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha = 0$ d'où $\alpha_{éq} = \arcsin\left(\dfrac{\mathrm{I.B.}l}{\mathrm{mg}}\right)$.

10. Etude de la roue de Barlow :

1°) Chaque élément de courant positionné sur le segment OA amène une force élémentaire $\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$ dirigée vers la droite sur la figure (puisuqe l'intensité I, posisitve, est orientée de O vers A). Ceci va donc amener une rotation de la roue dans le sens trigonométrique.
Le moment des forces de Laplace demande au préalable d'évaluer la force de Laplace élémentaire subie par un élément de courant positionné en un point P de la barre.
$\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$ s'écrit sur la base orthonormée$\left(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}\right)$où

$\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP}$: $\overrightarrow{dF} = Idr\overrightarrow{u_r} \wedge \left(-B\right)\overrightarrow{u_z} = IBdr\overrightarrow{u_\theta}$

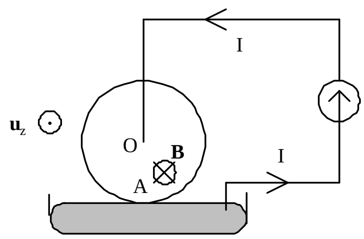
en notant $r = OP$.

Le moment en O de cette force est :

$\overrightarrow{dM_O} = OP\overrightarrow{u_r} \wedge dF\overrightarrow{u_\theta} = IBrdr\overrightarrow{u_z}$

On déduit alors par intégration :

$\overrightarrow{M_O} = \displaystyle\int_{barre} \overrightarrow{dM_O} = \int_0^a IBrdr\overrightarrow{u_z} = IB\frac{a^2}{2}$



2°) Le calcul s'inspire de la même méthode. Le courant d'intensité I va se répartir en filet de courant d'intensité dI. Pour un élément de courant de longueur dl pris sur un filet de courant , on aura une force de Laplace (doublement élémentaire) : $\overrightarrow{d^2F} = dI\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$
avec $\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta}$ ce qui donne : $\overrightarrow{d^2F} = dI.B\left(dr\overrightarrow{u_\theta} - rd\theta\overrightarrow{u_r}\right)$

Le moment de cette force par rapport à O sera : $\overrightarrow{d^2M_O} = OP\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{dF} = dI.Brdr\overrightarrow{u_z}$

ce qui amène en intégrant le long du filet, donc pour r variant de 0 :

$d\overrightarrow{M_O} = \displaystyle\int_{filet} \overrightarrow{d^2M_O} = dI.B\frac{a^2}{2}$

En sommant les contributions des différents filtes, on retrouve donc le même résultat

$\overrightarrow{M_O} = IB\dfrac{a^2}{2}$