Mouvements à force centrale et dans des champs newtoniens

1. Mouvement à force centrale :

L'exercice consiste en la recherche de la loi de force corespondant à telle ou telle trajectoire pour un mobile de masse m soumis de la part d'un point fixe O à une force centrale.
En cours, on a montré, en s'appuyant sur la conservation du moment cinétique, qui se traduit notamment par l'existence de la constante de s aires : C = cste = $r^2\dot{\theta}$, et en introduisant la variable de Binet : u = 1/r, que l'accélération pouvait dans un tel cas s'exprimer selon : $\vec{\gamma} = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)\vec{e}_r$ (seconde formule de Binet).

La RFD conduit à : $m\vec{\gamma} = -mC^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)\vec{e}_r = F(r)\vec{e}_r$

Il suffit donc d'introduire dans cette relation l'équation polaire de la trajectoire pour en déduire la loi F(r).

a) Pour r = a.expθ : $-\frac{mC^2}{a^2}\exp(-2\theta).\frac{2}{a}\exp(-\theta) = F(r)$ d'où F(r) = $-2mC^2/r^3$.

b) Pour r = p(1+e cosθ) avec p > 0 : $$-mC^2\left(\frac{1+e\cos\theta}{p}\right)^2.\left(\frac{-e\cos\theta}{p}+\frac{1+e\cos\theta}{p}\right) = F(r)$$

soit $-\frac{mC^2}{p}\left(\frac{1+e\cos\theta}{p}\right)^2 = F(r)$

soit donc $F(r) = -\frac{mC^2}{p}\frac{1}{r^2}$

2. Mouvement d'un satellite terrestre :

1°) On assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R = 6400 km et de masse M et la satellite à un point matériel(S, m). On suppose le référentiel géocentrique galiléen. G = $6{,}67.10^{-11}$ u.s.i..

Ecrivons le TMC pour S(m), dans le référentiel géocentrique. $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OS}\wedge\vec{F} = \vec{0}$

car la force de gravitation $\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ est radiale donc son moment en O est nul.

Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\overrightarrow{OS}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OS}\wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$.
Donc S évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

$\vec{L}_O = mr\overrightarrow{e_r}\wedge\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$; on a donc $r^2\dot{\theta} = L/m = C$ où C est la constante des aires.

2°) Méthode de Binet. On pose : u = 1/r. Le vecteur vitesse a pour expression : $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

D'après (1°) : $r\dot{\theta} = \frac{C}{r} = Cu$ et $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}.\frac{C}{r^2} = -C\frac{d(1/r)}{d\theta} = -C\frac{du}{d\theta}$

Donc $\vec{v} = -C\frac{du}{d\theta}\overrightarrow{e_r} + Cu\overrightarrow{e_\theta}$

L'énergie mécanique est : $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mC^2\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right] - GMmu = cste$

En dérivant par rapport au temps, et en composant cette dérivation, on aura :

$$\frac{dE}{dt} = 0 == \left(\frac{1}{2}mC^2\left[2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2}+2u\frac{du}{d\theta}\right] - GMm\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}$$

Or $\dfrac{d\theta}{dt} \neq 0$ et en supposant $\dfrac{du}{d\theta} \neq 0$ (mouvement non circulaire)

on tire : $\left(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\vec{e}_r = \dfrac{GM}{C^2}$

Equation différentielle sur u(θ) qui s'intègre en $u(\theta) = -A.\cos(\theta-\theta_o) + GM/C^2$

On en déduit l'équation polaire de la trajectoire : $r(\theta) = \dfrac{1}{u(\theta)} = \dfrac{p}{1 - e.\cos(\theta - \theta_o)}$.

En identifiant : $p = C^2/GM$ et $e = AC^2/GM$ qui dépendront des conditions initiales du mouvement.

3°) Seconde méthode : vecteur excentricité.

Montrons que le vecteur : $\vec{e} = \vec{e}_\theta - \dfrac{L}{GmM}\vec{v}$ a une dérivée nulle par rapport au temps.

$\dfrac{d\vec{e}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r - \dfrac{L}{GmM}\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ sachant que d'après la RFD : $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{-GM}{r^2}\vec{e_r}$

donc : $\dfrac{d\vec{e}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r + \dfrac{L}{GmM}\dfrac{GM}{r^2}\vec{e}_r$ avec $\dot{\theta} = L/(mr^2)$

On déduit donc finalement que ce vecteur est invariant dans le temps.

On choisit l'origine des angles polaires pour avoir $\theta = (\vec{e}, \vec{e}_\theta)$. On aura donc : $\vec{e} \bullet \vec{e}_\theta = e.\cos\theta$ en notant e le module du vecteur excentricité.

Par ailleurs, en reprenenant l'expression de ce vecteur, on obtient :

$\vec{e} \bullet \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta \bullet \vec{e}_\theta - \dfrac{L}{GmM}\vec{v} \bullet \vec{e}_\theta$ avec $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

donc : $\vec{e} \bullet \vec{e}_\theta = 1 - \dfrac{L}{GmM} r\dot{\theta} = 1 - \dfrac{L^2}{GMr}$ on a donc $e\cos\theta - 1 = -\dfrac{L^2}{GMm^2r}$

L'équation de la trajectoire peut bien se mettre sous la forme : $r(\theta) = \dfrac{p}{1 - e.\cos\theta}$ où e est la norme du vecteur excentricité, avec par identification : $p = GMm^2/L^2$.

4°) $r_{min} = h + R = p/(1+e)$ et $r_{max} = H + R = p/(1-e)$; on tire $p = 1{,}2.10^4$ km et e = 0,72.

3. Vitesses de périhélie et d'aphélie :

En utilisant l'équation polaire d'une ellipse on écrit les rayons des périhélie et aphélie :

$r_a = a(1 + e)$ (rayon maximal) et $r_p = a(1 - e)$ (rayon minimal).

Par la loi des aires, en notant σ le module du moment cinétique, $\sigma = mr^2\dot{\theta}$ = cste.

En les périhélie et aphélie, étant à des valeurs extrémales du rayon, la vitesse n'a pas de composante radiale (dr/dt = 0), ce qui n'est pas le cas ailleurs sur l'ellipse.

La vitesse en ces poitns particulier est donc orthoradiale, c'est à dire orthogonale au vecteur position.

On a donc : $\sigma/m = v_a.r_a = v_p.r_p = C$

ce qui amène : $v_a = \dfrac{C}{\frac{p}{1-e}}$ et $v_p = \dfrac{C}{\frac{p}{1+e}}$

Par ailleurs, la loi des aires impose : C = 2(dS/dt) où dS/dt est la vitesse aréolaire, invariante.

dS/dt = S/T = 2(πab)/T où S est la surface de l'ellipse et T la période de révolution de la terre dans son orbite autour du soleil.

Les valeurs a,b,c et e caractérisant l'ellipse sont liées par : $c^2 = a^2 - b^2$ et e = c/a (employer le formulaire).

On tire b = $a\sqrt{1-e^2}$

Le grand axe de l'orbite est 2a, avec : 2a = $\dfrac{p}{1-e} + \dfrac{p}{1+e} = \dfrac{2p}{1-e^2}$ donc : $p = a(1 - e^2)$.

En rassemblant ces informations on explicite : $v_a = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ et $v_p = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$

A.N.: $v_a = 29{,}37.10^3$ m/s et $v_p = 30{,}37.10^3$ m/s.

4. Durée d'une saison :

La trajectoire de la Terre autour du Soleil répond à : $r = \frac{p}{1+e.\cos\theta}$ où p et e sont donnés.

Le mouvement est à force centrale : il suit la loi des aires et donc : $r^2\dot{\theta} = r^2\frac{d\theta}{dt} = C$.

Cette relation établit un lien entre temps et angle polaire, que l'on peut intégrer selon : $\Delta t = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{r^2}{C}d\theta$

La valeur de C est déterminée par les conditions initiales. Connaissant les conditions du mouvement à un instant donné, C est définitivement déterminée. C'est le cas au niveau du périhélie.

Il vient : $C = \frac{\left\|\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}\right\|}{m} = r_p.v_p = 4{,}46.10^{15}$ m²s⁻¹.

Il reste à intégrer : $\Delta t = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{r^2}{C}d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{C}\frac{p^2}{\left(1+e.\cos\theta\right)^2}d\theta$

La valeur du produit e.cosθ est comprise entre –e et + e avec e << 1 . En utilisant un D.L.1, on obtient :

$$\Delta t \simeq \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{C}p^2\left(1-2e.\cos\theta\right)d\theta = \frac{p^2}{C}\left(\left[\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} - 2e\left[\sin\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2}\right)$$

AN : Dans l'hémisphère Nord, l' hiver correspond à une évolution entre θ = 0 et θ = π/2. $\Delta t_{été} = 7{,}66.10^6$ s
L' été correspond à une évolution entre θ = π et θ = 3π/2. $\Delta t_{hiver} = 7{,}99.10^6$ s

5. Masse de la Terre :

Par le th. de Gauss : $\Phi = -4\pi K.M_{int}$ où K est la constante d'attraction universelle. Le champ de gravitation produit par la terre étant à symétrie sohérique, on raisonne sur une sphère centrée sur la terre.
$\Phi = -4\pi G(r).r^2$ en notant $\vec{G} = -G(r)\overrightarrow{e_r}$ le champ de gravitation terrestre.
Ce qui conduit à $m = gR^2/K$.
Par l'étude du mouvement de la Lune, on applique la troisième loi de Kepler, qui amène : $m = 4\pi^2a^3/KT^2$.
A.N. $m = 6{,}02.10^{24}$ kg.

6. Energie sur une orbite elliptique ; retour d'un satellite :

1°) Ecrivons l'expression de l'énergie mécanique du satellite : $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$ (1)

avec en coordonnées polaires : $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$

La conservation du moment cinétique se traduit par la constante des aires : $C = r^2\dot{\theta}$ = cste.

D'où : $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$

Les valeurs r_a et r_p étant des valeurs extrémales de r, elle correspondant à l'annulation de $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$.

Elles sont donc solution de l'équation : $E = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GMm}{r}$

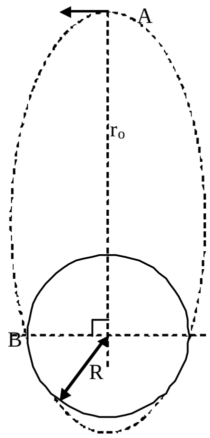
qui s'écrit sous la forme d'une équation du second degré en r : $E.r^2 + GMm.r - mC^2/2 = 0$

La somme des solutions est $r_a + r_p = 2a = \frac{-GMm}{E}$ d'où : $E = \frac{-GMm}{2a}$ (2)

En écrivant le théorème de Gauss pour une sphère de rayon r = R pour le champ de gravitation, on aura :
$- g_o.4\pi R^2 = -4\pi GM$ dont on déduit : $GM = g_o.R^2$ (3)

En utilisant (1), (2) et (3), on écrit : $-\dfrac{g_o R^2 m}{2a} = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{g_o R^2 m}{r}$

soit finalement : $v^2 = g_o R^2\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)$



2°) Le satellite est initialement situé sur une orbite circulaire de rayon r_O ; déterminons sa vitesse v_O.

On a alors a = r et donc par la relation précédente : $v_o = \sqrt{\dfrac{g_o R^2}{r_o}}$.

Le satellite va subir une variation de vitesse de v_1 à v_o, au niveau du point A, pour le placer sur l'orbite de retour (AB).

A son passage par un point A de l'orbite criculaire de rayon r_o, on exerce sur le satellite dans la direction de son vecteur vitesse et de façon quasi instantanée une force qui le ralentit (rétro-fusées) le plaçant sur l'orbite de retour.
Le demi grand axe a_1 de cette orbite est relié à ses caractéristiques géométriques.

Au point A : $r = r_a = r_o = \dfrac{p}{1-e}$

Au point B : $\theta = \pi/2$, $r = r(\theta = \pi/2) = p = R$

On en déduit : $1 - e = R/r_o$ et donc $e = 1 - \dfrac{R}{r_o}$

Comme : $2a_1 = \dfrac{p}{1-e} + \dfrac{p}{1+e} = \dfrac{2p}{1-e^2}$ donc : $p = a_1(1 - e^2)$

Connaissant p = R et e, on tire : $a_1 = \dfrac{r_o}{2 - \dfrac{R}{r_o}}$

En exploitant la relation construite en 1°) on obtient alors la vitesse en A sur cette orbite : $v_1 = \sqrt{\dfrac{g_o R^3}{r_o{}^2}}$

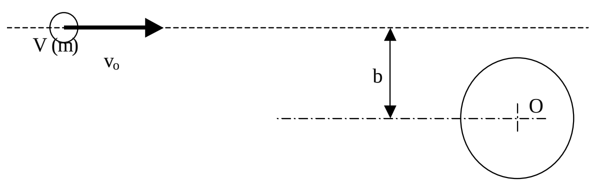
La variation d'énergie qu'il faut faire subir au satellite en A pour assurer son retour dans ces conditions sera :

$$\Delta E = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left(v_1{}^2 - v_o{}^2\right) = \frac{1}{2}mg_o\frac{R^2}{r_o}\left(\frac{R}{r_o} - 1\right)$$

7. Trajectoire hyperbolique - fronde gravitationnelle :

Un vaisseau spatial V de masse m, a une vitesse v_o lorsqu'il se trouve très éloigné d'un planète de masse M, centrée en O. On note b la distance entre la droite support de la trajectoire incidente et le point O.

1°) L'interaction de gravitation est : $\vec{F} = \dfrac{-GMm}{r^2}\vec{e_r}$ force centrale attractive.



Le référentiel R_O lié à la planète de centre O, supposé galiléen le TMC donne : $\dfrac{d\vec{\sigma}}{dt} = \overrightarrow{OV} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

En effet le moment de la force par rapport à O est nul, puisqu'à tout instant cette force est colinéaire à (OV).Le moment cinétique en O est donc constant.

On calcule la valeur du moment cinétique à partir des conditions initiales :
$\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OP}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0) = mbv_o\overrightarrow{e_z}$

2°) Montrons que le vecteur excentricité : $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{p} \wedge \vec{\sigma}}{GMm^2} - \vec{e}_r$ est invariant en montrant que sa dérivée par rapport au temps est toujours nulle.

Le moment cinétique a pour expression : $mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$ et est invariant.

$\dfrac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \dfrac{\dfrac{d\vec{p}}{dt} \wedge \vec{\sigma}}{GMm^2} - \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ avec par la RFD : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{-GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

d'où $\dfrac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \dfrac{\dfrac{-GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r} \wedge mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}}{GMm^2} - \dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{0}$

Pour établir l'équation de la trajectoire on exprime de deux façons le produit scalaire $\vec{r}.\vec{\varepsilon}$:
$\vec{r} \bullet \vec{\varepsilon} = r\varepsilon\cos\theta$
et d'autrepart : $\vec{r} \bullet \vec{\varepsilon} = r\overrightarrow{e_r} \bullet \left(\dfrac{\vec{p} \wedge \vec{\sigma}}{GMm^2} - \vec{e}_r\right) = \dfrac{\sigma^2}{GMm^2} - r$

On tire finalement : $r(\theta) = \dfrac{\dfrac{\sigma^2}{GMm^2}}{1 + \varepsilon\cos\theta}$

Comme r peut tendre vers l'infini, on a un système en état de diffusion, on attend une trajectoire hyperbolique.

3°) Calculons le vecteur excentricité à partir des conditions initiales.
$\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{p} \wedge \vec{\sigma}}{GMm^2} - \vec{e}_r = \dfrac{m\overrightarrow{v_o} \wedge mbv_o\overrightarrow{e_z}}{GMm^2} - \vec{e}_{r\infty}$

où $\vec{e}_{r\infty}$ désigne l'unitaire radial quand le vaisseau V est infiniment éloigné de la planète.

$\overrightarrow{e_y} \bullet \vec{\varepsilon} = \overrightarrow{e_y} \bullet \left(\dfrac{bv_o^2}{GM}\overrightarrow{e_{r\infty}} \wedge \overrightarrow{e_z} - \vec{e}_{r\infty}\right) = \dfrac{bv_o^2}{GM}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ (faire absolument un schéma !)

Il vient donc : $\dfrac{bv_o^2}{GM}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 0$

d'où $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{GM}{bv_o^2}$ soit : $\alpha = 2\arctan\left(\dfrac{GM}{bv_o^2}\right)$

En jouant sur le paramètre d'impact b, on règle donc l'angle de déviation subi par le mobile (angle entre les trajectoires incident et émergente).

8. Rentrée d'un satellite dans l'atmosphère :

1°) La troisième loi de Kepler donne : $\dfrac{R^3}{T^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$ avec T = 1 h 30 = 5400 s on trouve R = 6660 km et don H = R – R_o = 260 km.

2°) a) Le TMC s'écrit pour le satellite, dans le référentiel géocentrique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = r\vec{u_r} \wedge \left(-\frac{GM}{r^2}\vec{u_r} - k\vec{v} \right) = -kr\vec{u_r} \wedge \vec{v} = -\frac{k}{m}\vec{L}$

b) Le moment cinétique conserve donc toujours la même direction, puisque sa variation est coliénaire à lui-même. Comme $\vec{L} = r\vec{u_r} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ le vecteur position reste orthogonal à la direction du moment cinétique et donc le mobile M évolue dans le plan orthogonal à $\vec{L}$ passant par le centre d'attraction O.

c) En porjetant le TMC sur l'axe qui porte $\vec{L}$, et en intégrant par rapport au temps, on tire : $L(t) = L(0).\exp\left(\frac{-kt}{m}\right)$.

On a une décroissante exponentielle caractérisée par une constante de temps $\tau = m/k$.
Si le frottement est suffisamment faible, donc si τ est grand, le DL1 de L(t) donne : $L(t) \approx L(0)(1 - t/\tau)$ (1)

d) Si la trajectoire est quasi-circulaire, on a par approximation :

$\vec{L} = r\vec{u_r} \wedge m\vec{v} = mrv\vec{u}$ avec $L(0) = mr_o v_o$.
L'équation (1) donne alors : $rv = r_o v_o.(1 - t/\tau)$ (2)

Il nous faut établir une autre relation entre vitesse et rayon.
En écrivant la RFD, dans l'approximation consisitant à considérer la trajectoire comme quasi-circulaire, on a en projection sur la direction radiale : $mv^2/r = GMm/r^2$
donc $rv^2 = GM = cste$.
Il vient donc : $rv^2 = r_o.v_o^2$ (3)

En élevant cette équation au carré et en la divisant par l'équation (2), on tire finalement : $r = r_o.(1 - 2\,t/\tau)$

e) Sur une période, $\Delta r = -2r_o.T/\tau$, ce qui amène : $\tau = 22000\text{h} \approx 2{,}5$ ans.
Ceci justifie bien a posteriori les approximation faites sur la quasi-circularité de l'orbite.

f) Comme $r.v = r_o.v_o(1 - t/\tau)$ et $r = r_o(1 - 2t/\tau)$, on tire, en faisant le rapport des deux équations et par un DL1 en t/τ : $v = v_o(1 + t/\tau)$
Du fait des frottements, la vitesse va augmenter, car par ailleurs l'altitude va décroître.

En se référant aux expressions des énergies (écrite par approximation pour un mouvement circulaire) :
$E_c = GMm/2r$ (car par la RFD $v^2/r = GM/r^2$) ; $E_p = -GMm/r$ et $E = -GMm/2r$.

On a donc $E = -Ec$, donc les frottements qui amènent une variation de l'énergie mécanique $dE < 0$, entraîne une variation $dE_c > 0$, mais aussi une variation d'énergie potentielle $dEp = -2.dE_c > 0$.

La variation de E avec le temps s'obtient (au premier ordre en t/τ) en introduisant $r = r_o(1 - 2t/\tau)$ dans l'expression de l'énergie mécanique et en faisant un DL1.

Il vient finalement : $E = \frac{-GMm}{2r_o}\left(1 + \frac{2t}{\tau}\right)$

Sur un tour, donc pour $\Delta t = T$, on aura $\Delta E = \frac{-GMm}{2r_o}\left(\frac{2\Delta t}{\tau}\right)$=-4260 kJ.

g) L'énergie dissipée par frottement se dissipe par transfert thermique sur le nez de l'avion, ce qui amène un échauffement des tuiles de protection en céramique.

Le bilan sur la durée d'un tour est : $\Delta E + mc\Delta T = 0$ d'où une élévation de température $\Delta T = 40$ °C.
Le calcul néglige cependant la dissipation d'énergie par convection et rayonnement, donc exagère la valeur de ΔT.

9. Satellite circulaire – frottement dans les hautes couches de l'atmosphère :

1°) Questions classiques, traitées en cours . S'y reporter en cas de besoin !

2°) a) A partir de la relation établie au (1°) : $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+z}} = R\sqrt{\dfrac{g_o}{R+z}}$

on différencie : $dv = \dfrac{-1}{2} R\sqrt{g_o}\left(R+z\right)^{-3/2} dz$.

Or on a aussi obtenu : $T = \dfrac{2\pi\left(R+z\right)^{3/2}}{R\sqrt{g_o}}$ soit : $\dfrac{R\sqrt{g_o}}{\left(R+z\right)^{3/2}} = \dfrac{2\pi}{T}$ d'où dv = -(π/T).dz

En assimilant différentielles et variations : Δv = -(π/T).Δz

Attention : On pourrait à tort écrire v = 2π(R + z)/T et différencier cette relation selon : dv = 2π.dz/T

Cette démarche est fausse car T varie aussi avec z, et le calcul juste s'écrira donc :

$$dv = d\left(\frac{2\pi(R+z)}{T}\right) = 2\pi\frac{dz}{T} - 2\pi\frac{(r+z).dT}{T^2}$$

Cette expression mène après simplification au résultat précédent : Δv = -(π/T).Δz

b) A partir du TMC, faisant intervenir les moment de la force de gravitation et celui de la force de frottement : $\dfrac{d}{dt}\left(m.(R+z).v\right) = m\dfrac{dv}{dt}(R+z) + mv\dfrac{dz}{dt} = 0 + \left(R+z\right)\dfrac{-kmv^2}{z}$

En assimilant petites variations et différentielles, dz/dt sera la variation par untié de temps de l'altitude soit en raisonnant sur un tour d'orbite : dz/dt ≈ Δz/T et de même dv/dt ≈ Δv/T

En utilisant de plus le 2-a) :

$$m\frac{dv}{dt}(R+z) + mv\frac{dz}{dt} = m\frac{\Delta v}{T}(R+z) + mv\frac{\Delta z}{T} = -mv\frac{\Delta z}{2T} + mv\frac{\Delta z}{T}$$

Il vient donc : $mv\dfrac{\Delta z}{2T} = \left(R+z\right)\dfrac{-kmv^2}{z}$ soit avec T = 2π(R + z)/v : $k = \dfrac{-z\Delta z}{4\pi\left(R+z\right)^2}$

c) Le trvail des forces de frottement sur un tour (quasi-circulaire) vaut : $W = -2\pi(R+z).kmv^2/z$

avec $v^2 = g_o.R^2/(R+z)$ donc en injectant le résultat du b) : $W = \dfrac{1}{2} mg_o\left(\dfrac{R}{R+z}\right)^2 \Delta z$.

Le bilan énergétique donne : ΔE = W (forces non conservatives).

3°) On écrit maintenant f sus la forme : $f = f_o.v^n$.

La perte d'énergie mécanique est égale au travail de frottement, soit exprimé en termes de puissances :

$$\frac{dE}{dt} = f_o.v^{n+1}.$$

Par ailleurs, d'après le 2-c), le travail du frottement pour une variation dz d'altitude est :

$$\delta W = \frac{1}{2} mg_o\left(\frac{R}{R+z}\right)^2 dz$$

Le texte donne enfin : dz = -c.dt (c constante positive).

On peut donc égaler les deux expressions de la puissance de frottement :

$$\frac{\delta W}{dt} = \frac{-1}{2} mg_o\left(\frac{R}{R+z}\right)^2 c = -f_o.v^{n+1}$$

En injectant : $v = R\sqrt{\dfrac{g_o}{R+z}}$ et en identifiant les puissances portant sur le facteur (R+z) on aboutit à n = 3.

Il vient alors : $\dfrac{-1}{2} mg_o R^2 c = -f_o.R^4 g_o^{\ 2}$ soit $f_o = \dfrac{-mc}{2g_o R^2}$

Soit l'expression pour la force de frottement : $f = \dfrac{-mc}{2g_o R^2} v^3$

La suite des exercices restera non corrigée (manque de temps)…☺

Les éléments de correction proposés dans le sujet seront suffisants.