DYNAMIQUE EN REFERENTIELS NON GALILEENS.

1. Anneau sur une tige en rotation : On considère une tige rectiligne tournant dans un plan horizontal autour de son extrémité O, à la vitesse angulaire constante ω. Un ressort est enroulé autour de la tige, l'une de ses extrémités est fixée en O, l'autre est solidaire d'une masse m de position M qui peut coulisser sans frottement sur la tige.

a) Etudier la position d'équilibre de la masse relativement à la tige en fonction de ω, de la raideur k du ressort et de sa longueur à vide l.

b) La masse etant déplacée de sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale par rapport à la tige, calculer la période des oscillations.

R : a) Dans le référentiel lié à la tige, la condition d'équilibre s'écrit : $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ *en tenant compte ici de la force d'inertie :* $+ m\omega^2 x\, \mathbf{i}$*. D'où* $x_{éq} = kl/(k - m\omega^2)$*. b) la masse étant en mouvement, il faut ajouter la force de Coriolis :* $F_c = -2m\omega \mathbf{k} \wedge dx/dt\, \mathbf{i}$*. On tire une équation différentielle du 2°ordre en x. d'où x(t). On observe des oscillations autour de* $x_{éq}$*, de période* $T = 2\pi/(\omega_o^2 - \omega^2)^{1/2}$ *avec* $\omega = \sqrt{k/m}$*.*

2. La situation précédente est reprise avec une **méthode énergétique**.

a) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle :

$E_{pi} = \frac{-1}{2} m\omega^2 x^2$ où x est la distance OM.

b) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique du système et en déduire l'équation du mouvement.

c) Déterminer la possibilité d'une position d'équilibre et discuter sa stabilité.

d) On écarte le mobile de la position d'équilibre d'abscisse $x_{éq}$ de a. Expliciter x(t).

3. Un axe vertical rigide (A), posé sur un plateau tournant (P) supporte à son extrémité supérieure deux fils auquels sont suspendues deux boules de masse m. L'axe de rotation de (P) coïncide avec l'axe de révolution de (A). On fait croître lentement, à partir d'une valeur nulle, la vitesse de rotation ω du plateau. En supposant que pour toute valeur de ω les boules atteignent leur position d'équilibre dans le référentiel tournant à la vitesse ω, calculer l'angle d'inclinaison α des fils avec la verticale, en fonction de ω.

R : $\cos\alpha = g/\omega^2 l$*. (g accélération de la pesanteur).*

4. Mouvement d'un anneau sur un cerceau en rotation :

Un cerceau de centre O et de rayon a situé dans un plan vertical autour d'un de ses tangentes verticales, avec un mouvement uniforme défini par sa vitesse angulaire ω. Un anneau M de masse m, assimilable à un point matériel est mobile sans fortement sur le cerceau. On note θ l'angle que fait OM avec la verticale descendante passant par O.

1°) Ecrire le théorème de la puissance cinétique afin d'étudier le mouvement relatif de l'anneau dans le plan vertical contenant le cerceau. En déduire l'équation différentielle décrivant ce mouvement.

2°) On veut étudier l'équilibre relatif de M.

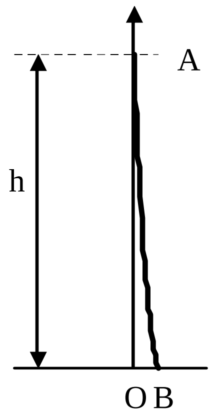
Exprimer une relation en θ donnant les positions d'équilibre. Déterminer ces positions et discuter de leur stabilité. (On est encouragé à fournir une solution graphique).

3°) On souhaite que l'équilibre stable corresponde à $\theta_o = 30$ °. Quelle devra être la vitesse angulaire si a = 0,2 m et g = 10 ms^{-2} ?

4°) On écarte l'anneau d'un angle $\Delta\theta$ faible à partir de cette position d'équilibre, puis on le laisse évoluer. Montrer que l'on observe alors des oscillations périodiques dont on exprimera la fréquence.

R : 1°) $-mga.\sin\theta + ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta = ma^2\ddot{\theta}$ *; 2°) 2 positions d'équilibre (une stable, l'autre instable) ; 3°)* $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3a\sqrt{3}}} = 4{,}39 \ rad/s$ *; 4°)* $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g\sqrt{3}}}$ *d'où* $f_o = 1/T_o = 1{,}05$ *Hz.*

5. Expérience de Reich :



Cette étude est basée sur l'expérience historique effectuée par Reich, à Freiberg (Allemagne) en 1833. La trajectoire d'une bille lâchée dans un puits de mine (pas de vent) a révélé une légère déviation par rapport à la verticale. Pour une hauteur de chute h = 158 m, on a mesuré une déviation vers l'Est d = OB = 2,7 cm.
On donne $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$ et la latitude de Freiberg $\lambda = 51°$ N.
Un jour sidéral a une durée de 86164 s.
La raison de la déviation observée est l'existence, dans le référentiel terrestre, de la force de Coriolis, due à la rotation de la Terre.
1°) Faire un schéma du problème et exprimer la force Coriolis agissant sur la bille.
2°) Mettre le problème en équation, et expliciter les relations donnant l'accélération de la bille sur la base ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) liée au référentiel terrestre, où $\mathbf{e}_x$ est dirigé vers l'Est, $\mathbf{e}_y$ pointe vers le Nord et $\mathbf{e}_z$ est l'unitaire vertical ascendant.(On confondra les directions radiales et verticales).
3°) L'effet perturbateur de la force de Coriolis étant faible, on peut étudier le mouvement vertical de la bille en le négligeant. On aura alors : $\mathbf{v}_r(t) = -g.t\ \mathbf{e}_z$.
Ceci conduit à étudier le mouvement en négligeant dans les équations du (1°) les termes mettant en jeu les composantes horizontales de la vitesse de la bille.
Déterminer l'expression x(t) de l'évolution de la position de la bille selon l'axe (Ox) en fonction du temps, et en déduire la valeur de la déviation d attendue à l'arrivée au sol..
R : $x(t) = g\omega.\cos\lambda.(t^3/3)$ avec $\omega = 2\pi / 86164$. $d = x(t_i)$ où t_i est l'instant d'arrivée au sol.

6. Le pendule de Foucault.

Un pendule simple, de longueur l, est écarté de sa position verticale d'équilibre $AB_{éq}$; la masse oscillante B est abandonnée sans vitesse initiale dans la position B_0 de coordonnées (O, x_0, y_0, z_0) par rapport au repère terrestre $B_{éq}xyz$ ($B_{éq}x$ est tangente au parallèle de latitude λ, dirigée vers l'Est, $B_{éq}y$ est dans le plan méridien, dirigé vers le Nord, et $B_{éq}z$ est verticale ascendante). On tiendra compte de la rotation uniforme de la Terre autour de la ligne des pôles avec une vitesse angulaire : $\omega = 7{,}3.10^{-5}$ rad/s.
On posera $a = \omega \sin\lambda$ et $b = \sqrt{g/l}$ (on prendra en compte le fait que $a \ll b$).
1°) a) Représenter le problème et définir par un schéma les axes Ox, Oy et Oz.
b) Ecrire la Relation Fondamentale de la Dynamique dans le référentiel ($B_{éq}$, x, y, z).
2°) On restreind le problème à de petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre. Le pendule restera donc approximativement dans le plan ($B_{éq}$, x, y) durant son mouvement.
a) En utilisant le fait que la vitesse angulaire ω est faible, montrer, en le justifiant,que la tension T du fil reste égale au poids mg du mobile, avec une très bonne approximation.
b) Etablir le système d'équation différentiels permettant de décrire le mouvement de B :

$$\ddot{x} - 2a\dot{y} + b^2x = 0$$
$$\ddot{y} + 2a\dot{x} + b^2y = 0$$

3°) En posant $Z = x + iy$, où ($i^2 = -1$), résoudre le système précédent.
Montrer que les équations du mouvement de B, pour les petites oscillations s'écrivent :

$$x = y_0 \cos(bt) \sin(at) \quad \text{et} \quad y = y_0 \cos(bt) \cos(at).$$

Exprimer le rapport y(t)/x(t) et interpréter.
4°) a) Décrire qualitativement, en le justifiant, le mouvement suivi par le pendule.
b) Déduire des équations de ce mouvement la durée d'une révolution complète du plan d'oscillation du pendule de Foucault, en un lieu de latitude 30°.
c) Pour quelle latitude aurait-on une durée de révolution égale à 24 heures ?

R : $x/y = \tan(at)$: le « plan » du mouvement d'oscillation du pendule va lentement dévier avec une vitesse angulaire $a = \omega.\sin\lambda$.

5. Régulateur centrifuge et tachymètre. Théorème du moment cinétique.

Un régulateur est constitué d'un losange articulé OABC dont le sommet O est fixe et dont le sommet B est une bague de masse m' qui glisse sur l'axe de rotation OO'. Les quatres tiges du losange, de longueur a, ont une masse négligeable et les articulations A et C portent une même masse m assimilable à une masse ponctuelle.

Lorsque l'arbre moteur OO' tourne à la vitesse angulaire variable ω, la position du losange est définie par l'angle (COA) = 2α. On négligera tout frottement.

1°) La masse m' de B est négligeable. Tant que ω est inférieur ou égal à une valeur ω_0, l'angle α reste nul.

a) Exprimer, en fonction de m, a, ω , $d\omega/dt$, α et $d\alpha/dt$, les forces d'inertie agissant sur A, en projection sur la base (**x**, **y**, **z**) du référentiel tournant Oxyz.

b) En déduire la loi $\omega.\sin^2\alpha$ = Cste si $\omega > \omega_0$.

c) Etablir l'expression de $d^2\alpha/dt^2$ en fonction de α, ω et ω_0 après avoir exprimé ω_0.

2°) La masse m' de B n'est plus négligeable. Montrer que B ne se soulèvera que si $\omega > \omega_1$. Exprimer ω_1 en fonction de ω_0 et du rapport m'/m.

3°) Dans un tachymètre, la bague B, de masse m' supposée négligeable, est soumise à l'action d'un ressort de raideur k, de tension nulle lorsque $\alpha = 0$. Lorsque l'arbre moteur OO' tourne à vitesse angulaire constante ω, la bague B se soulève de h. Exprimer la loi d'étalonnage ω^2 = f(h) du tachymètre.