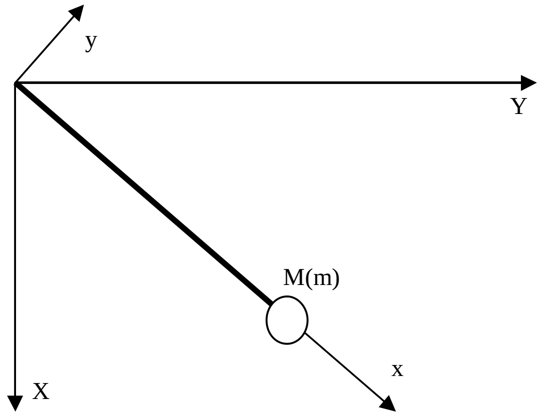
DYNAMIQUE EN REFERENTIELS NON GALILEENS. (Corrigés).

1. Anneau sur une tige en rotation :

a) Dans le référentiel lié à la tige, la condition d'équilibre s'écrit : Σ**F** = **0** .

En tenant compte du poids, vertical, de la réaction du support, de la force de rappel du ressort $-k(x - l_o)\overrightarrow{e_x}$ orthogonal à la barre et des la forces d'inertie :

la force centrifuge : $+ m\omega^2 x\overrightarrow{e_x}$, et la force de Coriolis : $-2m\omega\,\overrightarrow{e_z} \wedge \dot{x}\overrightarrow{e_x} = -2m\omega\dot{x}\overrightarrow{e_y}$



La projection de la RFD sur l'axe (Ox) amène : $m\ddot{x} = -k(x - l_o) + m\omega^2 x$

L'équilibre s'obtient en la position $x_{éq}$ telle que $\ddot{x} = 0$, d'où $x_{éq} = kl_o/(k - m\omega^2)$.

Cette solution n'a d'existence physique que si $(k/m) > \omega^2$, c'est-à-dire si le ressort a une constante de raideur k suffisamment grande.

Remarque : la réaction du support va compenser le poids. Si le mobile est immobile dans le référentiel relatif lié à la barre, la force de Coriolis sera nulle. Sinon elle sera elle aussi compensée par la réaction de la barre.

b) la masse étant en mouvement, il faut tenir compte de la force de Coriolis : . Mais celle-ci n'aura pas d'effet sur le mouvement puisqu'elle est compensée par la réaction de la barre.

L'équation du mouvement est : $m\ddot{x} = -k(x - l_o) + m\omega^2 x$

équation différentielle du 2°ordre en x, qui se met sous la forme : $\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = kl_o$

Avec $\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) > 0$ posons : $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} > 0$

$x(t) = A.\cos\Omega t + B.\sin\Omega t + x_{éq}$ avec $x_{éq} = kl_o/(k - m\omega^2)$.

On observe des oscillations autour de $x_{éq}$, de période $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}}$.

Vues les conditions initiales : A = a et B = 0, donc finalement : $x(t) = a.\cos\Omega t + x_{éq}$

2. La situation précédente est reprise avec une **méthode énergétique**.

a) Question de cours : le travail élémentaire δW de la force centrifuge doit s'identifier à une diminution élémentaire d'énergie potentielle.

Soit : $+ m\omega^2 x\overrightarrow{e_x} \bullet dx\overrightarrow{e_x} = m\omega^2 x dx = -dE_p$ d'où par intégration : $E_{pi} = \frac{-1}{2}m\omega^2 x^2$ où x est la distance OM.

b) $E = E_c + E_p$ = cste car les forces qui travaillent dans ce problème sont conservatives.

Soit : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - l_o)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E = cste$

En dérivant cette équation par rapport au temps et en simplifiant, on tire :

$m\dot{x}\ddot{x} + k(x - l_o)\dot{x} - m\omega^2 x\dot{x} = 0$ soit $m\ddot{x} = -k(x - l_o) + m\omega^2 x$

c) Une position d'équilibre existe pour $dE_p/dx = 0$, soit avec : $E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - l_o)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

pour $k(x - l_o) - m\omega^2 x = 0$ donc : $x_{éq} = kl_o/(k - m\omega^2)$.

La stabilité est conditionnée par le signe de $d^2E_p/dx^2 = k - m\omega^2$.

Si $k > m\omega^2$, $d^2E_p/dx^2 > 0$, alors l'équilibre est stable. Cette condition est par ailleurs nécessaire pour que l'équilibre existe ($x > 0$).

d) On écarte le mobile de la position d'équilibre d'abscisse $x_{éq}$ de a. L'équation du mouvement, établie en b), est : $m\ddot{x} = -k(x - l_o) + m\omega^2 x$

équation différentielle du 2°ordre en x, qui se met sous la forme : $\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x = kl_o$

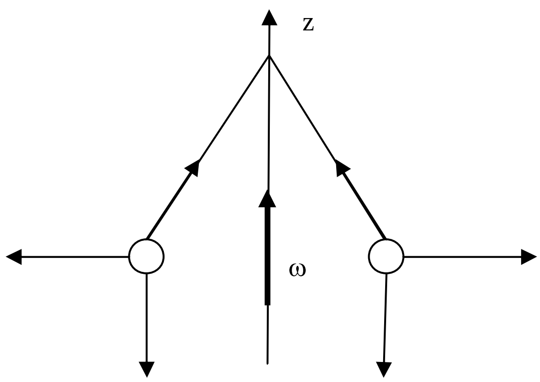
Avec $\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) > 0$ posons : $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} > 0$

$x(t) = A.\cos\Omega t + B.\sin\Omega t + x_{éq}$ avec $x_{éq} = kl_o/(k - m\omega^2)$.

On observe des oscillations autour de $x_{éq}$, de période $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}}$.

Vues les conditions initiales : A = a et B = 0, donc finalement : $x(t) = a.\cos\Omega t + x_{éq}$

3. Double pendule conique.



On raisonne dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe fixe (Oz), non galiléen.

La RFD s'écrit : $m\vec{\gamma} = m\vec{g} + \vec{f_{ie}} + \vec{f_{ic}} + \vec{T}$

A l'équilibre, $m\vec{\gamma} = \vec{0}$ et comme la vitesse relative est nulle : $\vec{f_{ic}} = \vec{0}$

Projetons la relation sur la direction orthogonale au fil : $f_{ie}\cos\alpha - mg\sin\alpha = 0$

avec $f_{ie} = m\omega^2 HM = m\omega^2 l\sin\alpha$

Il vient donc : $l\omega^2\cos\alpha = g$ ou $\alpha = \arccos\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$

Si $\omega \to \infty$, $\cos\alpha \to 0$ donc $\alpha \to \pi/2$.

Pour $\omega^2 < g/l$, l'équation n'a pas de solution.

4. Mouvement d'un anneau sur un cerceau en rotation :

1°) Faisons l'inventaire des forces exercées sur l'anneau dans le référentiel lié au cerceau, non galiléen.

M(m) sera soumis à :

son poids, $m\vec{g}$ vertical, $m\vec{g} = mg\left(\cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}\right)$

la réaction du cerceau $\vec{N}$, orthogonale au cerceau (pas de frottement),

la force d'inertie d'entraînement : force centrifuge, $\vec{f_{ie}} = m\omega^2\overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{HM} = (a + a\sin\theta)\left(\sin\theta\vec{e_r} + \cos\theta\vec{e_\theta}\right)$

la force d'inertie de Coriolis : $\vec{f_{ic}} = -2m\omega\vec{e_z} \wedge \vec{V_r}$

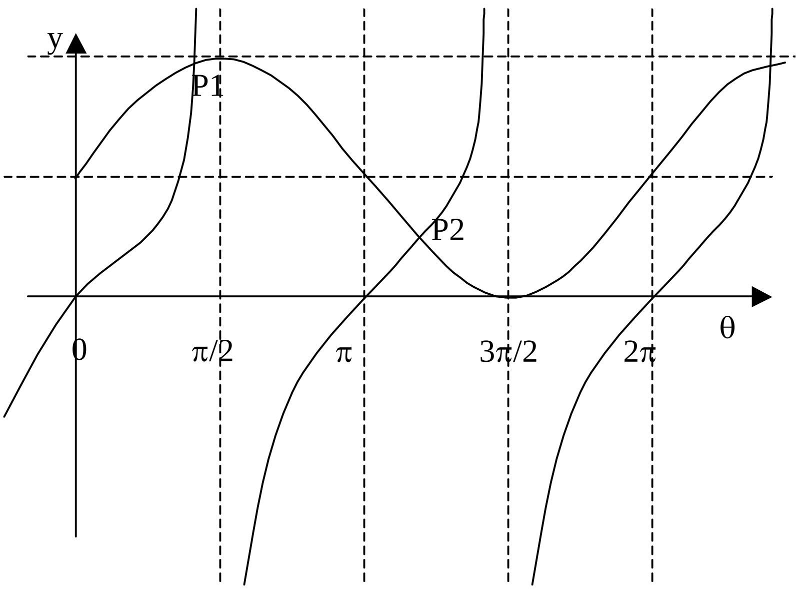
où $\overrightarrow{V_r} = a\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$ est la vitesse relative de M, c'est à dire la vitesse de l'anneau le long du cerceau.
Le théorème de la Puissance Cinétique est l'écriture différentielle du théorème de l'énergie cinétique : $\frac{dEc}{dt} = \sum \vec{F} \bullet \overrightarrow{V_r}$ dans le référentiel relatif.

L'énergie cinétique est : $Ec = \frac{1}{2} m\overrightarrow{V_r}^2 = \frac{1}{2} ma^2\dot{\theta}^2$

Après simplification par $\dot{\theta}$, le TPC donne : $-mga.\sin\theta + ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta = ma^2\ddot{\theta}$

2°) On veut étudier l'équilibre relatif de M. Les positions d'équilibre correspondent à $\ddot{\theta} = 0$
soit : $mga.\sin\theta = ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta$
On peut remarquer que la division de l'équation par $\cos\theta$ est possible puisque $\theta = \pi/2$ et $\theta = 3\pi/2$ ne sont pas des solutions.

soit finalement : $\tan\theta = (a\omega^2/g)(1 + \sin\theta)$
La solution graphique correspond aux points d'intersections P1 et P2 entre les deux graphes
$y_1 = \tan\theta$ et $y_2 = (a\omega^2/g)(1 + \sin\theta)$



P1 correspond à $0 < \theta < \pi/2$ et P2 à $\pi < \theta < 3\pi/2$.

Discutons la stabilité.
Graphiquement, pour la position P1, si on augmente légèrement θ, la valeur $y_1 > y_2$. Comme on alors $\cos\theta > 0$, on aura donc $mga.\sin\theta - ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta > 0$, donc une valeur de $-mga.\sin\theta + ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta = ma^2\ddot{\theta} < 0$, donc $\ddot{\theta} < 0$, la particule M(m) aura tendance à revenir en P1 : c'est une position d'équilibre stable.
Pour la position P1, si on augmente légèrement θ, la valeur $y_1 > y_2$. Comme on alors $\cos\theta < 0$, on aura donc $mga.\sin\theta - ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta < 0$,

donc une valeur de $-mga.\sin\theta + ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta = ma^2\ddot{\theta} > 0$, donc $\ddot{\theta} > 0$, la particule M(m) aura tendance à s'éloigner de P2 : c'est une position d'équilibre instable.

La discussion peut aussi se faire par le calcul, en examinant le signe de la dérivée de la projection des forces sur la direction du mouvement (obtenue par le TPC) :

$$\frac{d}{d\theta}\left(\text{- mga.sin}\,\theta + \text{ma}^2\omega^2(1+\sin\theta).\cos\theta\right) = -mga\cos\theta + ma^2\omega^2\cos^2\theta - ma^2\omega^2\sin\theta - ma^2\omega^2\sin^2\theta$$

etc…

3°) On souhaite que l'équilibre stable corresponde à θ_O = 30 °. Alors $\sin\theta_o = 1/2$ et $\cos\theta_o = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En utilisant le résultat du 1°) pour $\ddot{\theta} = 0$, on tire $\omega = \sqrt{\frac{2g}{3a\sqrt{3}}} = 4{,}39\ rad/s$

4°) On écarte l'anneau d'un angle $\Delta\theta$ faible à partir de cette position d'équilibre, puis on le laisse évoluer. Il est lâché d'une position d'équilibre stable. On sait qu'il va donc évoluer selon de petites oscillations harmoniques autour de l'équilibre.

Reprenons l'équation du mouvement : $-mga.\sin\theta + ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta = ma^2\ddot{\theta}$
que l'on va développer à l'ordre 1 au voisinage de θ_o.
En notant $f(\theta) = -mga.\sin\theta + ma^2\omega^2(1 + \sin\theta).\cos\theta$ on aura : $f(\theta) \approx f(\theta_o) + (df/d\theta)_{\theta o}.(\theta - \theta_o)$
avec $f(\theta_o) = 0$ et $df/d\theta)_{\theta o} = -mga\cos\theta_o + ma^2\omega^2\cos^2\theta_o - ma^2\omega^2\sin\theta_o - ma^2\omega^2\sin^2\theta_o$

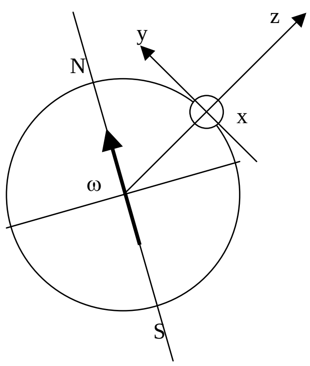
soit en injectant la valeur numérique de θ_o : $df/d\theta)_{\theta o}$ = $mg\frac{\sqrt{3}}{2}$ L'équation du mouvement devient donc : $\ddot{\theta} + \frac{g\sqrt{3}}{2a}\left(\theta - \theta_o\right) = 0$

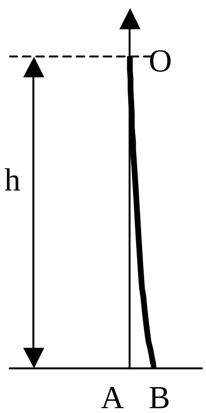
Solutions harmoniques de forme : $\theta(t) = \theta_o + \Delta\theta.\cos(\Omega t)$ de pulsation $\Omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{2a}}$

de période $T_o = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{g\sqrt{3}}}$ d'où $f_O = 1/T_O$ = 1,05 Hz.

5. Expérience de Reich :

1°)
.





2°) Le système est M(m), on raisonne dans le référentiel terrestre, non galiléen, le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen.
La RFD s'écrit : $m\vec{\gamma} = m\vec{g} + \vec{f_{ic}}$
Remarque importante : par définition, la force de pesanteur CONTIENT LE TERME D'INERTIE D'ENTRAINEMENT (force centrifuge).
Explicitons cette relation sur la base liée au référentiel terrestre :
on aura : $\vec{f_{ic}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V_r}$ avec $\vec{\omega} = \omega\cos\lambda\vec{e_y} + \omega\sin\lambda\vec{e_z}$ avec $\omega = 2\pi$ / 86164s

On aboutit au système :

$$\ddot{x} = -2\dot{z}\,\omega\cos\lambda + 2\dot{y}\,\omega\sin\lambda$$
$$\ddot{y} = -2\dot{x}\,\omega\sin\lambda$$
$$\ddot{z} = -g + 2\dot{x}\,\omega\cos\lambda$$

3°) On néglige les composantes non verticales du mouvement pour évaluer la force de Coriolis. Ceci conduit à simplifier le système précédent selon :

$$\ddot{x} = -2\dot{z}\,\omega\cos\lambda$$
$$\ddot{y} = 0$$
$$\ddot{z} = -g$$

Ceci conduit par intégration de la première équation à $x(t) = g\omega.\cos\lambda.(t^3/3)$

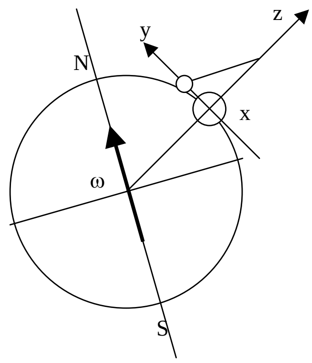
L'intégration de la troisième équation amène : $z(t) = h - gt^2/2$.

L'instant d'impact au sol est t_i tel que $z(t_i) = 0$. Soit $t_i = \sqrt{2h/g}$

La déviation d par rapport à la verticale, le long de l'axe (Ox), a lieu vers l'Est, avec $d = x(t_i)$.

On obtient : $d = \dfrac{g\omega\cos\lambda}{3}\left(\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right) = 2{,}74cm$

6. Pendule de Foucault :



1°) Le système est la masse M(m) du pendule ; on raisonne dans le référentiel terrestre, non galiléen, le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen.

La RFD s'écrit : $m\vec{\gamma} = m\vec{g} + \vec{T} + \overrightarrow{f_{ic}}$

Remarque importante : par définition, la force de pesanteur CONTIENT LE TERME D'INERTIE D'ENTRAINEMENT (force centrifuge).

Explicitons cette relation sur la base liée au référentiel terrestre :

La tension du fil va s'écrire : $\vec{T} = -\dfrac{x}{L}\overrightarrow{e_x} - \dfrac{y}{L}\overrightarrow{e_y} - \dfrac{z-L}{L}\overrightarrow{e_y}$

on aura : $\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r}$ avec $\vec{\omega} = \omega\cos\lambda\overrightarrow{e_y} + \omega\sin\lambda\overrightarrow{e_z}$ avec ω = 2π / 86164s

On aboutit au système :

$$\ddot{x} = \frac{-Tx}{mL} - 2\dot{z}\,\omega\cos\lambda + 2\dot{y}\,\omega\sin\lambda$$
$$\ddot{y} = \frac{-Ty}{mL} - 2\dot{x}\,\omega\sin\lambda$$
$$\ddot{z} = \frac{T(L-z)}{L} - g + 2\dot{x}\,\omega\cos\lambda$$

2°) Ayant de petites oscillations, on considère : z ≈ 0, et donc $\dot{z} = 0$ et $\ddot{z} = 0$.

On a donc : (L – z)/L ≈ 1

Le système précédent s'écrit alors :

$$\ddot{x} = \frac{-Tx}{mL} + 2\dot{y}\,\omega\sin\lambda$$
$$\ddot{y} = \frac{-Ty}{mL} - 2\dot{x}\,\omega\sin\lambda$$
$$\ddot{z} = \frac{T}{m} - g + 2\dot{x}\,\omega\cos\lambda$$

Comme ω est très faible, le terme $2\dot{x}\,\omega\cos\lambda$ est négligeable devant T et mg. Donc T = mg.

Les deux premières équations deviennent alors :

$$\ddot{x} - 2\dot{y}\,\omega\sin\lambda + \frac{gx}{L} = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{y} + 2\dot{x}\,\omega\sin\lambda + \frac{gy}{L} = 0$$

Soit en posant : g /L = b² et ω.sinλ = a : $\ddot{x} - 2a\dot{y} + b^2x = 0$ (A) et $\ddot{y} + 2a\dot{x} + b^2y = 0$ (B)

On notera que b >> a.

3°) Posons : Z = x + iy. E faisant (A) + i.(B) il vient : $\ddot{Z} + 2ia\dot{Z} + b^2 Z = 0$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2iar + b^2 = 0$
de solutions $r_1 = -ia + i\sqrt{a^2+b^2} \simeq -ia + ib$ et $r_2 = -ia - i\sqrt{a^2+b^2} \simeq -ia - ib$
On déduit une solution de forme : $Z(t) = C_1 \exp(-i(a-b)t) + C_2 \exp(-i(a+b)t)$ où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégrations déterminées par les Conditions Initiales : Z(0) = iy_o (x_o = 0) et pas de vitesse initiale.
Compte tenu de a << b, on tire : $C_1 = C_2 = iy_o/2$.
On réaménage alors l'expression de Z(t) selon :

$$Z(t) = \frac{iy_o}{2}\left(\cos(a+b)t - i\sin(a+b)t\right) + \frac{iy_o}{2}\left(\cos(a-b)t - i\sin(a-b)t\right)$$

En identifiant terme à terme x(t) et y(t) avec l'expression ainsi obtenue pour Z(t), on arrive finalement à : $x(t) = y_o\left(\sin(a+b)t + \sin(a-b)t\right)$ soit : $x(t) = y_o \sin at.\cos bt$
et $y(t) = y_o\left(\cos(a+b)t + \cos(a-b)t\right)$ soit $y(t) = y_o \cos at.\cos bt$

Ceci traduit des oscillations de pulsation b dans un plan qui va tourner lentement, avec un pulsation a.
En effet, le rapport x(t) / y(t) = tan(at). Ce rapport exprime la tangente de l'angle que fait la droite y(t) = x(t) avec (Bx). Cet angle évolue lentement avec le temps, et de façon périodique.

Du fait de la force de Coriolis , le pendule va osciller ,mais subir une légère déviation de sa course vers la droite, dasn l'hémisphère Nord (dans le sens de marche), amenant le plan d'oscillation à tourner.

La période de rotation du plan d'oscillation est donc $T = 2\pi/a = 2\pi/(\omega.\sin\lambda)$.
AN : Pour $\lambda = 30°$, T = 47h47 mn.
T = 24h ne serait obtenu que pour $\sin\lambda = 1$ soit $\lambda = \pi/2$ ou $-\pi/2$ (aux pôles).