Mécanique : systèmes de deux points.

1. Application des théorèmes de Koenig :

On assimile la Terre et la Lune à deux points matériels, de masses m_1 et m_2. La distance Terre-Lune est supposée fixe et égale à L. On admet que ces deux points décrivent des orbites circulaires autour de leur barycentre G, à la vitesse angulaires ω constante. (vitesse définie par rapport à des directions fixes).

Le barycentre G décrit autour du Soleil, supposé fixe, à l'origine S des coordonnées, une orbite circulaire de rayon a, à la vitesse angulaire Ω constante. Les deux mouvements sont supposés coplanaires et les rotations ont lieu dans le même sens.

Calculer pour le système Terre-Lune ainsi schématisé l'énergie cinétique dans le référentiel fixe de centre S ainsi que le moment cinétique du système en S, dans ce même référentiel.

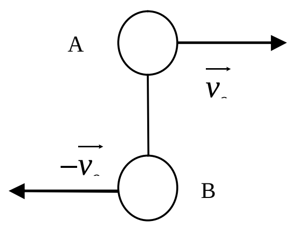
On fera apparaître dans les deux cas la quantité : $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

nommée "masse réduite" du système.

2. Deux points liés par une barre :

Deux solides A et B, assimilables à des points matériels de masses respectives 2m et m, sont liés par une barre de longueur L, inextensible et de masse négligeable. Le système est lancé à t = 0 avec les vitesses $\overrightarrow{V_{Ao}} = \overrightarrow{v_o}$ et $\overrightarrow{V_{Bo}} = -\overrightarrow{v_o}$.

Il évolue sur un plan horizontal, sans frottement.



1°) Montrer que le mouvement du centre d'inertie G est rectiligne et uniforme, et calculer la vitesse de G dans le référentiel R_L du laboratoire.

2°) On se place maintenant dans le référentiel barycentrique R^*.

a) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_G}^*$ est conservé.

b) Calculer les vitesses initiales de A et B dans R^* et vérifier que la résultante cinétique est nulle dans R^*. Exprimer $\overrightarrow{\sigma_G}^*$.

c) En déduire la vitesse angulaire ω de la barre dans son mouvement autour de G.

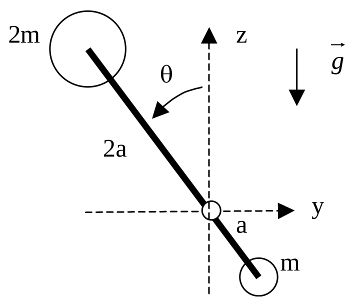
3°) Définir l'allure des trajectoires de G, A et B dans R^* puis dans R_L.

4°) Justifier, à partir du théorème de l'énergie cinétique, que l'énergie cinétique du mobile est conservée dans son mouvement.

5°) Calculer l'énergie cinétique du système dans R_L directement, puis en appliquant le théorème de Koenig : $E_c = E_c^* + (1/2)\, M_{tot}.v_G^2$.

3. Pendule avec frottement :

Un dispositif est constitué d'une barre de masse négligeable, de longueur 3a, portant à ses extrémités des masses m et 2m, assimilables à des points matériels, pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal passant à une distance 2a de la masse 2m. Le pendule est lâché sans vitesse initiale, avec un angle $\theta = \theta_o$. On considère qu'il subit un frottement linéaire traduit par un couple de frottement de moment : $\vec{C} = -h\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x}$.



Etablir l'équation du mouvement. Etudier $\theta(t)$ si θ_o est proche de π, et en considérant h faible.

R : Utiliser le TMC. On obtient le cas d'un oscillateur harmonique amorti

4. Contraction d'un système d'étoile double :

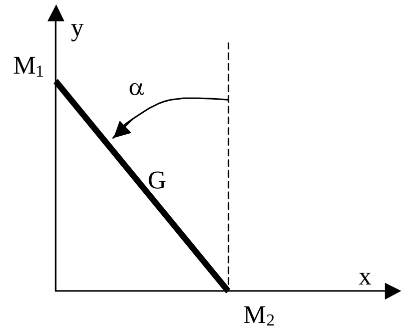
Un système d'étoile double est constitué de deux étoiles E_1 et E_2 de masses respectives m_1 et m_2 en interaction gravitationnelle. Toute interaction avec d'autres astres est supposée négligeable. L'ensemble constitue un système lié.

A l'état initial, les deux étoiles tournent autour de leur barycentre G, à une distance respective d = E_1E_2 et avec une vitesse angulaire Ω. Du fait de phénomènes dissipatifs, mettant en jeu une perte énergétique W, les deux étoiles sont amenées à se rapprocher l'une de l'autre à une distance d' = E_1E_2. Calculer la valeur que prendra alors la période de révolution des étoiles autour de leur barycentre. On notera K = $6{,}67.10^{-11}$ usi.

R : Bilan énergétique : $\Delta E = -W = \Delta E_c + \Delta E_p$; $T' = 2\pi / \Omega'$

avec $\Omega' = \dfrac{1}{d'}\sqrt{2K(m_1+m_2)\left(\dfrac{1}{d'}-\dfrac{1}{d}\right)+(d.\Omega)^2 - 2W\dfrac{(m_1+m_2)}{m_1.m_2}}$

5. Chute d'une échelle :



Une échelle, posée en appui contre un mur est modélisé par deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m, liés par une barre de longueur 2a, de masse nulle. G est le centre d'inertie.
L'échelle glisse en restant au contact du mur et du sol. On néglige tout frottement. On note R_1 et R_2 les normes des réactions du mur et du sol, g l'accélération de la pesanteur et α l'angle entre l'échelle et la verticale.
1°) Ecrire le TCI et en déduire deux équations exprimant R_1 et R_2 en fonction de m, a, g, α et ses dérivées temporelles.
2°) Ecrire le TMC en G. En utilisant les résultats du (1°), en déduire l'équation différentielle déterminant α(t).
3°) Retrouver cette dernière équation différentielle par des considérations énergétiques.

R : 1°) En projetant sur (Ox) et (Oy) : $R_1 = 2ma\left(\ddot{\alpha}.\cos\alpha - \dot{\alpha}^2.\sin\alpha\right)$

$R_2 = 2ma\left(-\ddot{\alpha}.\sin\alpha - \dot{\alpha}^2.\cos\alpha\right) + 2mg$

2°) le TMC donne : $2ma\ddot{\alpha} = R_2\sin\alpha - R_1\cos\alpha$ *d'où, avec le (1°) :* $2a\ddot{\alpha} = g\sin\alpha$.

3°) Directement ou par le second théorème de Koenig : $E_c = 2ma^2\dot{\alpha}^2$; $E_p = 2m.a.g.\cos\alpha$
Conservation de $E = E_c + E_p$ *=cste . Dériver cette expression par rapport au temps.*

6. Pendule coulissant :

On veut étudier le mouvement d'un système formé de deux points matériels de masses respectives m et M, liés par une barre de longueur L, de masse négligeable. L'extrémité de masse M est astreinte à glisser sans frottement sur un axe horizontal (Ox) formant support. On note g l'intensité du champ de pesanteur. Le système est abandonné sans vitesse initiale, la barre faisant un angle α = α_o avec la verticale ascendante (Oy).
1°) Etudier le mouvement du centre d'inertie G du système, et montrer que la vitesse de G par rapport au support peut s'écrire : $\vec{v_G} = \dfrac{mL}{m+M}\sin\alpha.\dot{\alpha}\,\vec{e_y}$.
2°) En écrivant la conservation de l'énergie mécanique du système, établir l'équation du mouvement sur α.
3°) Résoudre cette équation en supposant que α reste faible et donner la pulsation Ω des petites oscillations observées.

R : $E = \dfrac{1}{2}(m+M)\dfrac{m^2L^2}{(M+m)^2}\sin^2\alpha.\dot{\alpha}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{m.M}{(m+M)}L^2.\dot{\alpha}^2 - mgL\cos\alpha$; *en négligeant le premier terme :* $\Omega = \sqrt{\dfrac{m+M}{M}}.\sqrt{\dfrac{g}{L}}$

7. Deux points liés par un fil :

Deux points matériels P_1 et P_2, de masses respectives m et λ.m, sont liés par un fil de longueur l, inextensible et de masse négligeable, qui passe sans frottement par une ouverture ponctuelle O percée dans un plan horizontal fixe sur lequel P_1 glisse sans frottement. La trajectoire de P_2 est verticale. On notera g le champ de pesanteur.

1°) On suppose que le fil est constamment tendu. Ecrire le T.M.C. pour P_1 et en déduire la conservation de la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ où (r, θ) sont les coordonnées polaires de P_1.

Justifier que le système (P_1, P_2) est conservatif. Ecrire l'intégrale première de l'énergie du système sous la forme : $E = (1/2)m(1 + \lambda)\left(\dot{r}\right)^2 + m.W(r) = cste.$

Décrire l'allure du mouvement pour des conditions initiales quelconques.

2°) Montrer que, si le fil est initialement tendu, il le reste au cours du mouvement.

3°) A l'instant t = 0, P_1 est lancé à la distance r = a de O avec une vitesse v_o orthogonale à OP_1 et de module ω.a. Préciser l'allure du mouvement ultérieur. Mettre en évidence l'existence d'une valeur critique ω_c de ω.

R : 1°) Le mouvement de P_1 sera décrit en coordonnées polaires. Il est à force centrale. $C = r^2\dot{\theta}$ (C constante des aires).Celui de P_2 est paramétré par z (avec dz/dt = dr/dt). Comme il y a absence de frottements, le mouvement est conservatif. On écrit E = Ec + U = cste, avec $U = \lambda mg.(r - l)$ et Ec qui se met sous forme d'une somme de deux fonctions respectivement de $\dot{r}$ et de r. On peut alors écrire E sous forme :

$E = m.(1 + \lambda)\left(\dot{r}\right)^2 + m.W(r) = cste$; avec $W(r) = \lambda gr + C^2 / 2r^2$, qui joue le rôle d'un potentiel efficace.

On trace W(r), qui admet un minimum en $r_o = (C^2 / \lambda g)^{1/3}$. On discute des valeurs possibles pour r avec la condition : $\left(\dot{r}\right)^2 > 0$ qui implique E > W(r). D'où le mouvement de P_1, décrit selon la loi des aires, avec r compris entre deux valeurs.

2°) R.F.D. appliquée à P_2 (avec $\ddot{z} = \ddot{r}$). On calcule $\ddot{r}$ en dérivant l'intégrale première de l'énergie. D'où : $T = (m\lambda / 1 + \lambda).g + C^2 / r^3] > 0$. On peut aussi projeter la R.F.D. appliquée à P_1 sur $\boldsymbol{e}_r$.

3°) Vues les conditions initiales : $C = a^2\omega$. Par ailleurs, le lancement se faisant avec $\left(\dot{r}\right)_o = 0$, on a soit $r = r_{max}$ (lancement apocentrique) soit $r = r_{min}$ (lancement péricentrique).

Le premier cas a lieu pour $\omega < \omega_c$, le second pour $\omega > \omega_c$, avec $\omega_c = (\lambda g / a)^{1/2}$.

Pour $\omega = \omega_c$, trajectoire circulaire de rayon $r_o = a$.

8. Mouvement de Jupiter autour du Soleil :

1°) Le Soleil est d'abord considéré comme fixe, son centre S étant le centre d'un référentiel galiléen. Le centre J de la planète Jupiter, de masse m, décrit une orbite circulaire autour de S. Relier sa période de révolution T à la masse M_S du Soleil et au rayon a de l'orbite. On note la constante de gravitation : $K = 6{,}67.10^{-11}$ usi.

On donne T = 4332,6 jours terrestres, $M_s = 1{,}99.10^{30}$ kg. Calculer a.

2°) On considère maintenant le système Soleil-Jupiter en interaction gravitationnelle. On néglige toute autre interaction.
a) Montrer que le référentiel R* du centre d'inertie G de ce système est galiléen.
b) Ecrire la relation Fondamentale de la dynamique pour J puis S. En déduire l'équation du mouvement de la particule réduite P représentant le système.
On notera $\mu = M_S.m / (M_S + m)$ la masse réduite du système.
c) Donner l'allure du mouvement de P, S et J dans R*. Montrer que la période T' de révolution autour de G est identique pour ces trois points et qu'elle répond à la relation :

$$\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{KM}{4\pi^2}\left(1 + \frac{m}{M_S}\right)$$

Evaluer la correction ainsi apportée à la distance a'. On donne $m \approx M_s / 1000$.

9. Deux points liés par un ressort en mouvement rectiligne :
Deux points matériels M et M,'de masses m et m', glissent sans frottement sur un axe horizontal Ox ; les positions de ces deux points sont repérées par les abscisses x et x'.
Ces deux points sont reliés par un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide l_0 ; écartés de leur position d'équilibre, les deux points sont abandonnés sans vitesse initiale.
1°) Ecrire l'équation du mouvement de chacun des points.
2°) En déduire l'équation du mouvement de leur barycentre G ; quel résultat retrouve-t-on ?
3°) Multiplier la première équation du mouvement par $\dot{x}$ et la seconde par $\dot{x}'$. Mettre en évidence la conservation de l'énergie mécanique E du système, dont on donnera l'expression.
4°) On change les conditions initiales : les deux mobiles sont lancés avec une même vitesse initiale v_o, alors qu'ils sont écartés d'une distance $2.l_o$.
a) Quel est le mouvement du référentiel barycentrique R^* par rapport au référentiel absolu ?
b) On veut étudier le mouvement de M et M' dans R^* ; établir l'équation : $\ddot{y} + \frac{k}{\mu}(y - l_o) = 0$ où : $y = x - x'$ et $\mu = mm'/(m+m')$.
c) Résoudre cette équation et en déduire le mouvement de M et M' dans R^*, puis dans le référentiel absolu.

R : 1°) $m\ddot{x} = -k(x - x' - l_o)$ (1); $m'\ddot{x}' = k(x - x' - l_o)$ (2) 2°) G a un mouvement rectiligne uniforme (cf TRC) 3°) $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m'\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}k(x - x' - l_o)^2 + cste$ .4°) $v_G = v_o$.
En additionnant m'.(1) + m.(2) on trouve l'équation ; de solution $y(t) = l_o.(1+\cos\omega t)$.
Dans R^* : $mx + m'x' = 0$ et $y = x-x'$. On tire $x = m'y/(m+m')$ et $x' = -my/(m+m')$.
On additionne $v_o.t$ pour repasser dans le réf. absolu.