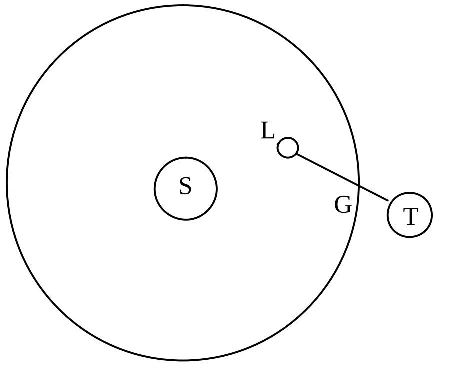
Mécanique : systèmes de deux points.

1. Application des théorèmes de Koenig



1. Appliquons le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique : $E_c = E_c{}^* + \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_G{}^2$.
Il faut calculer la vitesse de T et L pour expliciter E_c*.

Une trajectoire de rayon r, parcourue à vitesse angulaire ω, met en jeu une vitesse, en norme, valant : v = rω.

La terre comme la lune ont une trajectoire circulaire autour de leur barycentre G, dont il faut déterminer le rayon. Notons T et L leurs positions respectives. TL = l.,
D'après les propriétés du barycentre : $m_1\overrightarrow{TG} + m_2\overrightarrow{TL} = \vec{0}$
dont on tire, en distances : TL = (m_2/m_1)TG.
Comme TG + TL = l., on obtient : $TG = \frac{m_2}{m_1+m_2}l$ et $GL = \frac{m_1}{m_1+m_2}l$

On obtient donc : $E_c{}^* = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}l\right)^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}l\right)^2\omega^2$

soit après mise en forme : $E_c{}^* = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}l^2\omega^2 = \frac{1}{2}\mu l^2\omega^2$

Il faut aussi évaluer la vitesse de G : $V_G = a.\Omega$.
On a donc finalement : $E_c = \frac{1}{2}\mu l^2\omega^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)a^2\Omega^2$

2. Appliquons maintenant le théorème de Koenig pour le moment cinétique : $\overrightarrow{L_G} = \overrightarrow{L_G}{}^* + \overrightarrow{SG}\wedge(m_1+m_2)\overrightarrow{V_G}$.
On peut expliciter les vitesses et les moments cinétiques dans la base cylindro-polaire $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\vec{u})$ où l'unitaire $\vec{u}$ est orthogonal au plan de l'écliptique. On est dans le cas de mouvements circulaires. Pour le centre d'inertie G : $\overrightarrow{V_G} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{SG} = a\Omega\overrightarrow{e_\theta}$.

Les vitesses de T et L dans le référentiel barycentrique sont respectivement :
$\overrightarrow{V_T} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{GT} = \frac{m_2}{m_1+m_2}l\omega\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{V_L} = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{GL} = \frac{m_1}{m_1+m_2}l\omega\overrightarrow{e_\theta}$

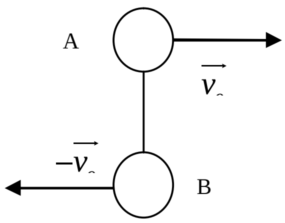
On obtient donc : $\overrightarrow{L_G}{}^* = \overrightarrow{GT}\wedge m_1\overrightarrow{V_T} + \overrightarrow{GT}\wedge m_2\overrightarrow{V_L} = m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}l\right)^2\omega\vec{u} + m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}l\right)^2\omega\vec{u}$

soit après mise en forme : $\overrightarrow{L_G}{}^* = m_2\frac{m_1}{m_1+m_2}l^2\omega\vec{u} = \mu l^2\omega\vec{u}$

Il faut aussi évaluer le moment cinétique de G par rapport à S, affecté de la masse totale du système : $\overrightarrow{SG}\wedge(m_1+m_2)\overrightarrow{V_G} = (m_1+m_2)a^2\Omega\vec{u}$
On a donc finalement : $\overrightarrow{L_S} = \mu l^2\omega\vec{u} + (m_1+m_2)a^2\Omega\vec{u}$

2. Deux points liés par une barre :

Remarquons au préalable que les conditions initiales du lancement doivent être telles que la vitesse relative entre les deux masses A et B, $\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}$ ne doit pas avoir de composante radiale, car la distance r = AB = cste. Ceci est effectivement respecté dans les conditions choisies.



1°) Ecrivons le TCI : $3m\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

Dans le référentiel R_o d'observation, les actions sont :

- les poids des deux masses,
- les réactions des supports.
- Au bilan, en l'absence de frottement : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ donc $\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \vec{0}$ soit

donc $\overrightarrow{V_G} = \overrightarrow{Cste}$

Par la relation de définition du barycentre : $\overrightarrow{V_G} = \frac{m_A\overrightarrow{V_A} + m_B\overrightarrow{V_B}}{m_A + m_B}$

soit en utilisant les valeurs connues aux conditions initiales : $\overrightarrow{V_G} = \frac{2m\overrightarrow{V_o} - m\overrightarrow{V_o}}{2m+m} = \frac{\overrightarrow{V_o}}{3} = \overrightarrow{Cste}$

2°) On se place maintenant dans le référentiel barycentrique R^*.

a) Par le TMC : $\frac{d\overrightarrow{\sigma_G}^*}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{Gext}}$ avec ici $\sum \overrightarrow{M_{Gext}} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{\sigma_G}^* = \overrightarrow{Cste}$

b) Par composition de mouvements, dans R*, à l'instant initial :

$\overrightarrow{V_{Ao}}^* = \overrightarrow{V_{Ao}} - \overrightarrow{V_{Go}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{V_o}$ et $\overrightarrow{V_{Bo}}^* = \overrightarrow{V_{Bo}} - \overrightarrow{V_{Go}} = \frac{-4}{3}\overrightarrow{V_o}$ On vérifie : $\overrightarrow{P_{tot}}^* = 2m\overrightarrow{V_{Ao}}^* + m\overrightarrow{V_{Bo}}^* = \vec{0}$

$\overrightarrow{\sigma_G}^* = \overrightarrow{GA} \wedge 2m\overrightarrow{V_A}^* + \overrightarrow{GB} \wedge m\overrightarrow{V_B}^*$. Ce moment cinétique étant constant, on peut l'exprimer à partir des valeurs dans les conditions initiales.

En notant $\vec{u}$ l'unitaire dirigeant (AB) de A vers B, on aura :

$$\overrightarrow{\sigma_G}^* = -\frac{L}{3}\vec{u} \wedge 2m\frac{2}{3}\overrightarrow{V_o} + \frac{2L}{3}\vec{u} \wedge m\frac{-4}{3}\overrightarrow{V_o} = \frac{-4}{3}mLV_o\overrightarrow{e_z}$$

où $\overrightarrow{e_z}$ est un unitaire formant un trièdre direct $\left(\vec{u}, \overrightarrow{V_o}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

c) Le mouvement de A et de B dans R* sont des mouvements circulaires car GA = L/3 = cste et GB = 2L/3 = cste. A, B et G restant toujours alignés, A et B ont donc même vitesse angulaire ω.

ω sera tel que $V_A^* = L\omega/3$ et $V_B^* = 2L\omega/3$. Donc $\omega = 2V_o/L$.

On aura donc : $\overrightarrow{\sigma_G}^* = \frac{-2}{3}mL^2\omega\overrightarrow{e_z}$

3°) G est immobile dans R*, A et B y décrivent des cercles autour de G, de rayons GA = L/3 et GB = 2L/3. Le mouvement dans R_o est une composition de celui observé dans R* avec une translation à vitesse $\overrightarrow{V_G}$. On obtient des cycloïdes pour trajectoires de A et B, centrées sur la trajectoire rectiligne de G.

4°) Par le th. de la Puissance cinétique (TPC), c'est-à-dire le TEC écrit sousforme différentielle : $\frac{dE_c}{dt} = P_{m\vec{g}} + P_{\overrightarrow{R_A}} + P_{2m\vec{g}} + P_{\overrightarrow{R_B}} = 0$, donc E_c = Cste.

5°) On peut donc calculer l'énergie cinétique du système dans le référentiel d'observation directement, en considérant le mouvement dans les conditions initiales : $E_c = \frac{1}{2}(2m)V_o^2 + \frac{1}{2}mV_o^2 = \frac{3}{2}mV_o^2$

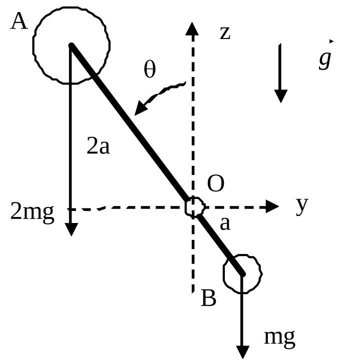
En appliquant le théorème de Koenig : $E_c = E_c^* + (1/2)\, M_{tot}.v_G^2$

il vient, avec $v_G = V_o/3$, $V_A^* = L\omega/3 = 2V_o/3$ et $V_B^* = 2L\omega/3 = 4V_o/3$:

$$E_c = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{2}{3}V_o\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{4}{3}V_o\right)^2 + \frac{1}{2}(3m)\left(\frac{1}{3}V_o\right)^2 = \frac{3}{2}mV_o{}^2$$

3. Pendule avec frottement :

Ecrivons le TMC au point O : $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{Oext}}$



Les actions extérieures correspondent aux poids des deux masses, à la réaction du support et au frottement (au niveau de la liaison, et dans l'air).
La réaction du support peut être vue comme une force dont la droite d'action passe par O, donc de moment nul. Les frottements se traduisent par un couple de frottement de moment : $\vec{C} = -h\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x}$.
Enfin, les moments des poids sont :
$\overrightarrow{OA} \wedge 2m\vec{g} = 4mga\sin\theta\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{OB} \wedge m\vec{g} = -mga\sin\theta\overrightarrow{e_x}$

Le système va tourner autour de l'axe (Ox) avec une vitesse angulaire ω = $\dot{\theta}$.
Son moment cinétique sera :
$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OA} \wedge 2m\overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{OB} \wedge m\overrightarrow{V_B} = 2a.2m.2a\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x} + a.m.a\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x} = 9ma^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x}$$

Le TMC s'écrit donc : $\frac{d}{dt}\left(9ma^2\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_x} = 3mga\sin\theta\overrightarrow{e_x} - h\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x}$

soit : $\ddot{\theta} + \frac{h}{9ma^2}\dot{\theta} - \frac{g}{3a}\sin\theta = 0$.

Si θ reste proche de π, on peut envisager un DL1 de sinθ au voisinage de π ; par la formule Taylor : $\sin\theta \simeq \sin\pi + (\theta - \pi).\cos\pi$ soit $\sin\theta \simeq -(\theta - \pi)$

Dans ces conditions, il vient pour équation du mouvement : $\ddot{\theta} + \frac{h}{9ma^2}\dot{\theta} + \frac{g}{3a}(\theta - \pi) = 0$

soit en posant $\varepsilon = \theta - \pi$: $\ddot{\varepsilon} + \frac{h}{9ma^2}\dot{\varepsilon} + \frac{g}{3a}\varepsilon = 0$
Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti, dont l'étude est classique.
Cela mène, dans le cas d'un frottement faible, à des oscillations amorties autour de la position θ = π.
A titre de révision, on peut donner la résolution complète : EC : $r^2 + \frac{h}{9ma^2}r + \frac{g}{3a} = 0$ de discriminant : $\Delta = \left(\frac{h}{9ma^2}\right)^2 - 4\frac{g}{3a} < 0$ dans l'hypothèse où h est faible.

On aura des oscillations de pseudo pulsation : ω = $\sqrt{\frac{g}{3a} - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{9ma^2}\right)^2} \simeq \sqrt{\frac{g}{3a}}$

Dans les conditions initiales envisagées : $\theta(t) \simeq \theta_o \exp\left(\frac{-h}{18ma^2}t\right)\cos(\omega t)$

4. Contraction d'un système d'étoile double :
On suppose implicitement dans le texte que les trajectoires des deux étoiles sont circulaires, avant et après la dissipation d'énergie. Elles tournent autour de leur barycentre G avec une vitesse angulaire Ω, puis avec une nouvelle valeur Ω' lorsqu'elle se sont rapprochée à une distance d'< d.

Exprimons les différentes énergies mises en jeu :

énergie cinétique initiale du système $E_C = \frac{1}{2} m_1 V_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2{}^2$

où $V_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d\Omega$ et $V_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} d\Omega$

donc $E_C = \frac{1}{2}\left[\frac{m_1 m_2{}^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2 m_1{}^2}{(m_1+m_2)^2}\right] d^2\Omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} d^2\Omega^2 = \frac{1}{2}\mu d^2\Omega^2$

où µ est la masse réduite du système.

énergie cinétique finale du système ; de même $E_C' = \frac{1}{2}\mu d'^2\Omega'^2$

énergie potentielle de gravitation initiale $E_p = \frac{-K m_1 m_2}{d}$ et finale $E_p' = \frac{-K m_1 m_2}{d'}$

(on suppose invariantes les deux masses).

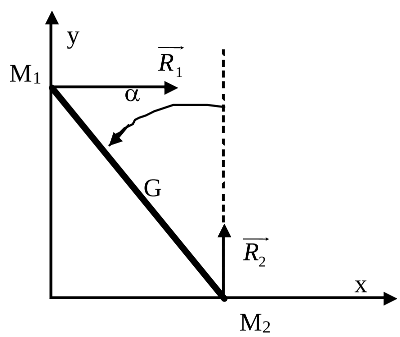
Le bilan énergétique $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = -W$ s'explicite selon :

$$\frac{1}{2}\left(\mu d'^2\Omega'^2 - \mu d^2\Omega^2\right) + \left(-K m_1 m_2\right)\left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{d}\right) = -W$$

On tire finalement : $\Omega' = \frac{1}{d'}\sqrt{2K(m_1+m_2)\left(\frac{1}{d'} - \frac{1}{d}\right) + (d.\Omega)^2 - 2W\frac{(m_1+m_2)}{m_1.m_2}}$

La période du système T est donc modifiée en T' $=2\pi / \Omega'$.

5. Chute d'une échelle :



1°) Référentiel : lié au sol, galiléen. Système : les deux masses $M_1(m)$ et $M_2(m)$. Le centre d'inertie G est ici au milieu du segment $[M_1M_2]$.
Actions sur le système : poids, 2mg s'applique de façon répartie sur le système, mais on peut aussi le ramener en G.
Les réactions du sol et du mur sont normales.

Le TCI s'écrit : $2m\frac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} + 2m\vec{g}$ (1)

Explicitons d'abord la vitesse de G en fonction de la variable angulaire α.

Le vecteur position de G est : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_2G} = x\vec{i} + a\cos\alpha\,\vec{j} - a\sin\alpha\,\vec{i}$ avec x = 2a.sinα

En dérivant par rapport au temps : $\overrightarrow{V_G} = a\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{i} - a\dot{\alpha}\sin\alpha\,\vec{j}$

puis dérivant par rapport au temps à nouveau :

$$\overrightarrow{a_G} = (a\ddot{\alpha}\cos\alpha - a\dot{\alpha}^2\sin\alpha)\vec{i} + (-a\ddot{\alpha}\sin\alpha - a\dot{\alpha}^2\cos\alpha)\vec{j}$$

En projetant (1) sur (Ox) et (Oy) : $R_1 = 2ma\left(\ddot{\alpha}.\cos\alpha - \dot{\alpha}^2.\sin\alpha\right)$

$$R_2 = 2ma\left(-\ddot{\alpha}.\sin\alpha - \dot{\alpha}^2.\cos\alpha\right) + 2mg$$

2°) Appliquons le TMC en G, dans le référentiel R*.

Le moment cinétique du système est alors : $\overrightarrow{L_G}* = \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{V_1}* + \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{V_2}* = 2ma^2\dot{\alpha}\,\overrightarrow{e_z}$

le mouvement des deux masses dans R* est circulaire de rayon a et de vitesse angulaire $\dot{\alpha}$.

le TMC $\frac{d\overrightarrow{L_G}*}{dt}=\sum\overrightarrow{M_{Gext}}$ donne : $2ma\ddot{\alpha}=R_2\sin\alpha-R_1\cos\alpha$

d'où, avec le (1°) et après calculs : $2a\ddot{\alpha}=g\sin\alpha$.

3°) utilisons le théorème de l'énergie cinétique sous forme différentielle (TPC) : $\frac{dE_c}{dt}=\sum P$

Les réactions des supports (sol et murs) étant normales, seul le poids travaille dans ce problème. $P_{2m\vec{g}}=2m\vec{g}\bullet\overrightarrow{V_G}$

On a calculé en 1°) $\overrightarrow{V_G}=a\dot{\alpha}\cos\alpha\vec{i}-a\dot{\alpha}\sin\alpha\vec{j}$ donc : $P_{2m\vec{g}}=2mga\dot{\alpha}\sin\alpha$

Il faut exprimer l'énergie cinétique dans le référentiel lié au sol. Employons le théorème de Koenig : $E_C=E_C*+\frac{1}{2}2mV_G{}^2$ avec $E_C*=2.\frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2a^2$.

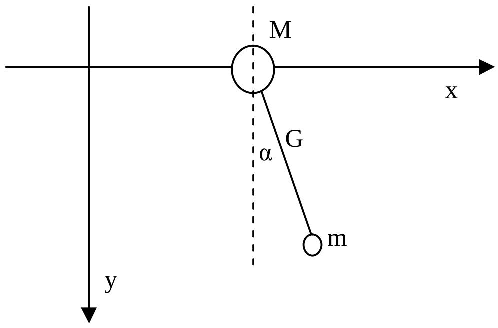
On a donc globalement : $E_C=m\dot{\alpha}^2a^2+m\dot{\alpha}^2a^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=2m\dot{\alpha}^2a^2$

L'écriture du TPC conduit donc à : $4ma^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}=2mga\dot{\alpha}\sin\alpha$

soit finalement : $\ddot{\alpha}=\frac{g}{2a}\sin\alpha$

Une rédaction différente consiste à écrire la conservation de l'énergie mécanique :
$E = E_c + E_p$ =cste . Puis à dériver cette expression par rapport au temps.

6. Pendule coulissant :



1°) Appliquons le TCI.
Référentiel : lié à la barre horizontale.
Actions : poids et réaction de la barre (sans frottement) sont verticaux. Il n'y a donc pas de composante horizontale de ces actions. G va donc conserver une valeur constante pour la composante horizontale de sa vitesse.
Le système étant immobile à l'état initial, ceci amène donc un abscisse x_G invariante pour G. Le mouvement de G est uniquement vertical.
L'ordonnée y_G du centre d'inertie répond à : $y_G=\frac{mL}{m+M}\cos\alpha$ d'où par dérivation temporelle : $\overrightarrow{v_G}=\frac{mL}{m+M}\sin\alpha.\dot{\alpha}\,\overrightarrow{e_y}$

2°) La masse M reste à la cote y = 0, la masse m a pour cote y = L.cosα ; 'énergie potentielle du système vaut E_p = -mgy soit donc E_p = -mgL.cosα.
On obtient l'énergie cinétique du système par le théorème de Koenig :

$E_C=E_C*+\frac{1}{2}\left(m+M\right)V_G{}^2$

E_C* se calcule aisément puisque le mouvement des deux masses m et M est un mouvement circulaire autour de G, de vitesse angulaire $\dot{\alpha}$.

On obtient après calculs (ou directement en utilisant un mobile fictif, voir cours) : $E_c*=\frac{1}{2}\frac{m.M}{(m+M)}L^2.\dot{\alpha}^2$

D'où finalement pour l'énergie mécanique :

$E=\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2L^2}{(M+m)^2}\sin^2\alpha.\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}\frac{m.M}{(m+M)}L^2.\dot{\alpha}^2-mgL\cos\alpha$

Cette énergie sera conservée (système conservatif, pas de frottement). En dérivant l'équation précédente par rapport au temps, on obtient l'équation exacte du mouvement.

3°) En supposant que α reste faible, le premier terme d'énergie $\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2L^2}{(M+m)^2}\sin^2\alpha.\dot{\alpha}^2$ sera négligeable devant les deux autres (sinα ~ α).

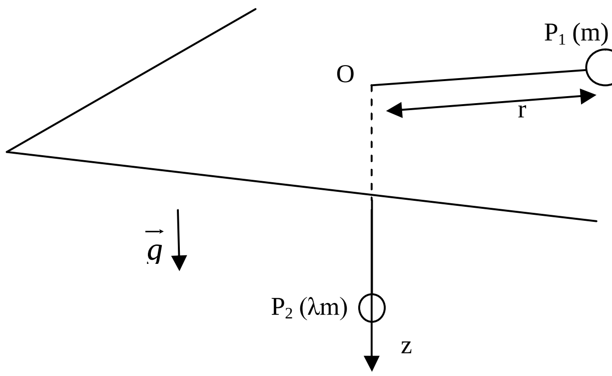
L'équation de conservation de l'énergie devient alors : $E = \frac{1}{2}\frac{m.M}{(m+M)}L^2.\dot{\alpha}^2 - mgL\cos\alpha$

. Sa dérivation temporelle donne alors : $0 = \frac{m.M}{(m+M)}L^2.\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + mgL\sin\alpha$

soit vues les approximations considérées : $\frac{M}{(m+M)}.\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}.\alpha = 0$

Ceci correspond à des petites oscillations de pulsation $\Omega = \sqrt{\frac{m+M}{M}}.\sqrt{\frac{g}{L}}$

7. Deux points liés par un fil :

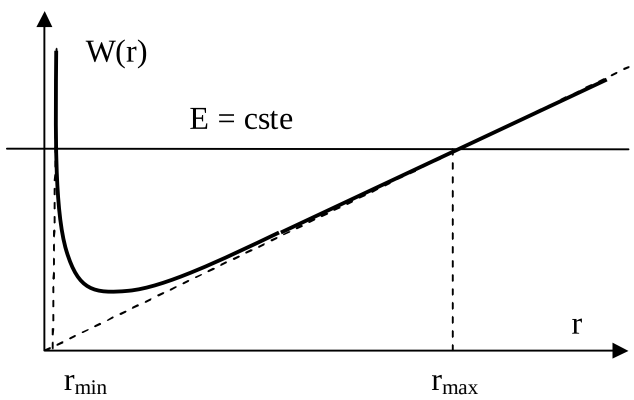


1°) Le mouvement de P_1 sera décrit en coordonnées polaires. Il est à force centrale.

Posons : $C = r^2\dot{\theta}$ (C constante des aires).
Le mouvement de P_2 est paramétré par z. Comme le fil conserve une longueur L : r + z = L, ce qui impose donc dz/dt = -dr/dt.
Comme il y a absence de frottements, le mouvement est conservatif.
On écrit E = Ec + U = cste,
avec pour énergie potentielle de pesanteur U = λmg.(r - L) et une énergie cinétique E_c qui se met sous forme d'une somme de deux fonctions respectivement de r• et de r.

En effet, on aura : $E_C = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\lambda m\dot{z}^2$

avec $\dot{z} = -\dot{r}$ et $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$



On peut alors écrire E sous forme :

E = m.(1 + λ) $\left(\dot{r}\right)^2$ + m.W(r) = cste (1) ;

avec W(r) = λgr + C² / 2r², qui joue le rôle d'un potentiel efficace (ou potentiel effectif).

On trace le graphe W(r), qui admet un minimum en $r_o = (C^2 / \lambda g)^{1/3}$.

On discute des valeurs possibles pour r avec la condition : $\left(\dot{r}\right)^2$ > 0 qui implique E > W(r).

D'où le mouvement de P_1, décrit selon la loi des aires, avec r compris entre deux valeurs de r correspondant aux situations limites pour lesquelles E = W(r).

2°) Ecrivons la R.F.D. appliquée à P_2 (avec $\ddot{z} = -\ddot{r}$), qui fournit en projection sur la verticale : $\lambda m \ddot{z} = -T + \lambda mg$

On calcule $\ddot{r}$ en dérivant l'intégrale première de l'énergie (1) :

$$\frac{dE}{dt} = 0 = (1+\lambda) m \dot{r} \ddot{r} + \lambda mg \dot{r} - m\frac{C^2}{r^3}\dot{r} \qquad \text{dont on tire} \qquad \ddot{r} = \frac{-\lambda g + \dfrac{C^2}{r^3}}{(1+\lambda)}$$

D'où : $T = \dfrac{\lambda m}{1+\lambda}\left(\dfrac{C^2}{r^3} + \lambda g\right) > 0$.

On peut aussi projeter la R.F.D. appliquée à P_1 sur la direction radiale, ce qui mène au même résultat.

3°) Vues les conditions initiales : C = a²ω.

Par ailleurs, le lancement se faisant avec $\left(\dot{r}\right)_o$ = 0, on a soit r = r_{max} (lancement apocentrique) soit r = r_{min} (lancement péricentrique). Le premier cas, lancement apocentrique a lieu pour $\omega < \omega_C$, le second, lancement péricentrique, pour $\omega > \omega_C$, avec ω_C = $\omega_c = \sqrt{\dfrac{\lambda g}{a}}$

Pour $\omega = \omega_C$, trajectoire circulaire de rayon r_O = a. Mouvement circulaire uniforme.

8. Mouvement de Jupiter autour du Soleil :

1°) Par la troisième loi de Kepler (facile à établir pour le cas d'un mouvement newtonien circulaire) :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{KM_S}{4\pi^2}$$

2°) Le système est isolé. En appliquant le TCI, on montre donc aisément que la vitesse du centre d'inertie G sera invariante. Le référentiel barycentrique est par définition en translation par rapport au référentiel absolu ; comme G a un mouvement rectiligne et uniforme, R*est donc galiléen. (voir cours).

b) On étudie le mouvement dans R*. Nous allons introduire un mobile fictif en combinant les équations des mouvements de chacun des deux points du système.

Pour J : $m\dfrac{d^2\overrightarrow{GJ}}{dt^2} = -\dfrac{KmM_S}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ (1) et pour S : $M_S\dfrac{d^2\overrightarrow{GS}}{dt^2} = +\dfrac{KmM_S}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ (2)

Combinons les deux équations selon : M_S.(1)-m.(2) : $mM_S\dfrac{d^2\overrightarrow{SJ}}{dt^2} = -\dfrac{KmM_S}{r^2}(m+M_S)\overrightarrow{e_r}$

Soit en introduisant le mobile fictif P, de masse μ = m.M_S/(m + M_S) de position P telle que $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{SJ}$: $\mu\dfrac{d^2\overrightarrow{GP}}{dt^2} = -\dfrac{KmM_S}{r^2}\overrightarrow{e_r}$

c) G étant le centre d'inertie, c'est le barycentre du système {(S, M_S) ; (J, m)}. Les poitns S, G, J et P sont donc alignés à tout instant. S, J et P tournent donc avec la même vitesse angulaire ω' dans le référentiel barycentrique, donc avec la même période T'.

A partir de la RFD écrite pour (P, μ) dans R*, et dans l'hypothèse d'un mouvement circulaire : $-\mu a'.\omega'^2\overrightarrow{e_r} = -\dfrac{KmM_S}{a'^2}\overrightarrow{e_r}$ où a' est la distance SJ = GP.

donc : $a'^3.\omega'^2 = \dfrac{KmM_S}{\mu} = K(m+M_S)$

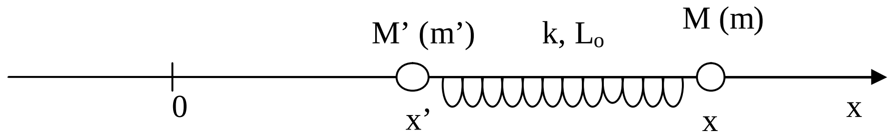
On tire : $a' = \left[\dfrac{KM_S}{4\pi^2}\left(1+\dfrac{m}{M_S}\right)T'^2\right]^{1/3}$

T' est la période effectivement mesurée. On en déduit une valeur a', avec la correction tenant compte de la masse de Jupiter. $a' = a\left(1+\dfrac{m}{M_S}\right)^{1/3} \simeq a\left(1+\dfrac{m}{3M_S}\right)$ avec m << M_S

L'écart entre les deux valeurs a et a' aura pour valeur relative $\Delta a/a = m/(3M_S) = 0{,}03$ %.

9. Deux points liés par un ressort en mouvement rectiligne :

1°)



RFD pour M : $m\ddot{x} = -k\left(x - x' - L_o\right)$ (1) RFD pour M' : $m'\ddot{x}' = +k\left(x - x' - L_o\right)$ (2)

2°) Le système est pseudo-isolé , car le poids de chacune des masses est compensé par la réaction de la barre horizontale. En appliquant le TCI, on a donc $\dfrac{d\overrightarrow{V_G}}{dt} = \vec{0}$, G a un mouvement rectiligne uniforme.

3°) multiplions l'équation (1) par $\dot{x}$, et l'équation (1) par $\dot{x}'$, puis sommons terme à terme.

Il vient : $m\dot{x}\ddot{x} + m'\dot{x}'\ddot{x}' = -k\left(x - x' - L_o\right)\left(\dot{x} - \dot{x}'\right)$

En remarquant que $m\dot{x}\ddot{x} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2\right)$ et $m'\dot{x}'\ddot{x}' = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m'\dot{x}'^2\right)$

ainsi que : $k\left(x - x' - L_o\right)\left(\dot{x} - \dot{x}'\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}k\left(x - x' - L_o\right)^2\right)$

on déduit la conservation de l'énergie : $E = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}m'\dot{x}'^2 + \dfrac{1}{2}k\left(x - x' - l_o\right)^2 + cste$.

4°) a)Pour la même raison que précédemment, la vitesse du centre d'inertie sera conservée durant tout le mouvement. On détermine cette vitesse à partir des conditions initiales. Comme les deux points sont lancés avec la même vitesse v_o , $v_G = v_o$.

b) On reprend les deux équations du mouvement établies en 1°).

On les combine selon m'.(1) + m.(2) ce qui amène : $mm'\left(\ddot{x} - \ddot{x}'\right) = -k\left(x - x' - L_o\right)\left(m + m'\right)$

on trouve donc l'équation : $\ddot{y} + \dfrac{k}{\mu}\left(y - l_o\right) = 0$ où : $y = x - x'$ et $\mu = mm'/(m+m')$.

c) L'équation précédente a pour solution : $y(t) = L_o.(1+\cos\omega t)$.

Dans R^* : $mx + m'x' = 0$ et $y = x-x'$. On tire $x = m'y/(m+m')$ et $x' = -my/(m+m')$.

On additionne le terme $v_o.t$ pour repasser dans le réf. absolu.