

PREMIER PRINCIPE POUR LES SYSTEMES FERMES (Corrigé)

1. Mesure de la capacité thermique massique (ou "chaleur massique") d'un solide :

a) Expérience adiabatique, sous la pression atmosphérique (le système {eau initiale, eau ajoutée, calorimètre} est thermiquement isolé). Equation calorimétrique : $\Delta H = Q_p = 0$.

Soit en détaillant chaque terme de variation d'enthalpie, relatif à des phases condensées :

$$m_1 \cdot c_o \cdot (t_{\text{éq}} - t_1) + m_2 \cdot c_o \cdot (t_{\text{éq}} - t_2) = 0 \quad (\text{en négligeant ici la capacité thermique du calorimètre}).$$

On tire : $t_{\text{éq}} = (m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2) / (m_1 + m_2) = 32,8 \text{ }^\circ\text{C}$.

b) Même mise en équation, mais en tenant compte de la capacité thermique du calorimètre :

$$(m_1 + \mu) \cdot c_o \cdot (t_{\text{éq}} - t_1) + m_2 \cdot c_o \cdot (t_{\text{éq}} - t_2) = 0$$

On tire : $\mu = \frac{m_2 (t'_2 - t'_e)}{t'_2 - t_1} - m_1$ soit numériquement : $\mu = 22,5 \text{ g}$.

c) La nouvelle équation calorimétrique est maintenant :

$$(m'_1 + \mu) \cdot c_o \cdot (t - t'_1) + m \cdot c_{\text{mét}} \cdot (t - t'_2) = 0$$

qui amène : $c_{\text{mét}} = \frac{\mu + m'_1}{m} \frac{(t - t'_1)}{t'_2 - t} c_o$ A.N.: $c_{\text{mét}} = 443 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

2. Calculs de travaux sur un chemin isotherme réversible :

a) $\delta W = -P_{\text{ext}} \cdot dV$. La transformation emprunte un chemin réversible, donc quasistatique : $P = P_{\text{ext}}$.

Elle concerne un Gaz Parfait, respectant : $P = nRT/V$

Elle est isotherme : $T = T_o = \text{cste}$ tout au long du chemin suivi lors de la transformation.

Il vient donc : $\delta W = -nRT_o \cdot dV/V$ qui s'intègre en : $W = -nRT_o \cdot \ln(V_f/V_i)$

avec $V_i = V_o$ et $V_f = V_o/2$

Soit finalement : $W = nRT_o \cdot \ln 2$

b) Même démarche, mais avec cette fois : $P = \frac{nRT}{V-b} - n^2 \frac{a}{V^2}$ (gaz de Van der Waals).

donc : $W = \int_{V_i}^{V_f} -nRT_o \frac{dV}{V-b} + \int_{V_i}^{V_f} n^2 a \frac{dV}{V^2}$

Soit : $W = -nRT_o \ln \frac{V_f - b}{V_i - b} + n^2 a \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_f} \right)$

2°) Dans les deux cas : $Q = \Delta U - W$

Cas a) : gaz parfait : $\Delta U = 0$ car $T_f = T_i = T_o$ (première loi de Joule) donc $Q = -W$.

Cas b) : gaz de Van der Waals : ΔU non nulle. $\Delta U = -n^2 a \left(\frac{1}{V_f} - \frac{1}{V_i} \right)$

Finalement : $Q = W = nRT_o \ln \frac{V_f - b}{V_i - b}$

3. Travail échangé pour un liquide peu compressible :

a) $\delta W = -P_{\text{ext}} \cdot dV$. La transformation emprunte un chemin réversible, donc quasistatique : $P = P_{\text{ext}}$ soit donc : $\delta W = -P \cdot dV$.

$$\alpha = \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \text{cste} \quad \text{et} \quad \chi_T = - \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \text{cste}$$

Or par définition mathématique : $dV = \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP$ puisque l'équation d'état relie V aux

variables P et T et en ce sens V est une fonction de P et T : $V(T, P)$.

Il vient donc : $dV = \alpha V dT - V \chi_T dP$

Le liquide étant très peu compressible, on peut écrire par approximation au premier ordre $V \approx V_0$ dans l'expression de dV . D'où $\delta W = -PdV = -P\alpha V_0 dT + PV_0 \chi_T dP$

b) Transformation isochore : $dV = 0$ donc $\delta W = 0$ et $W = 0$.

Transformation isobare : $dP = 0$ donc $\delta W = -PdV = -P\alpha V_0 dT$
soit en intégrant sur la seule température : $W = -\alpha P_0 V_0 (T_f - T_i)$.

Transformation isotherme : $dT = 0$ donc $\delta W = -PdV = PV_0 \chi_T dP$
soit en intégrant sur la seule pression : $W = V_0 \chi_T (P_f^2 - P_i^2)/2$.

c) En confondant les variations avec des variations élémentaires : $W \approx P_0 V_0 \chi_T \Delta P - \alpha P_0 V_0 \Delta T$
En identifiant avec : $W \approx -P_0 \Delta V$

on tire : $\Delta V = -W/P_0 = \alpha V_0 \Delta T - \chi_T V_0 \Delta P$ ou $\Delta V/V = \alpha \Delta T - \chi_T \Delta P$. $\Delta V/V = 0,3 \%$.

Effectivement la variation de volume est minimale et les approximations faites précédemment sont validées.

4. Compressions adiabatiques d'un gaz parfait :

1°) Compression adiabatique et réversible d'un gaz parfait, où le rapport des capacités thermiques γ est constant : les conditions d'application de la loi de Laplace sont réunies. $P \cdot V^\gamma = \text{Cste}$.

D'où : $V_f = (P_i / P_f)^{1/\gamma} \cdot V_i$ A.N. : $V_f = 0,193 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Donc $h_f = V_f / S$ où $S = 100 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$. $h_f = 0,0193 \text{ m}$. (1,93 cm).

$V = nRT/P$ injecté dans la loi de Laplace donne son expression en variables T, P dont on tire :

$$T_f = T_i \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad \text{soit numériquement : } T_f = 579 \text{ K.}$$

2°) La loi de Laplace n'est plus applicable car la transformation n'est pas quasi-statique. L'ensemble du travail fourni par le système mécanique est transmis au gaz, car le piston est de masse négligeable, et l'énergie correspondant à sa mise en mouvement (énergie cinétique) le sera donc aussi.

Le bilan énergétique est donc : $\Delta U = W$ avec $Q = 0$ pour le système : {gaz contenu dans le cylindre}.

La force appliquée par l'extérieur sur l'ensemble de la transformation est de norme $P_f \cdot S$. Le travail reçu par le gaz sera : $W = P_f \cdot (-V_f + V_i) = P_f \cdot S \cdot (-h_f + h_i)$

La variation d'énergie interne s'exprime avec la variation de température : $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T'_f - T_i)$

avec $n = P_i \cdot V_i / (RT_i)$.

Le bilan $\Delta U = W$ donne donc : $\frac{P_i V_i}{(\gamma-1) T_i} (T'_f - T_i) = -P_f V'_f + \frac{P_f}{P_i} P_i V_i$

avec $P_f \cdot V'_f = nRT'_f$ et $P_i \cdot V_i = nRT_i$

Après simplifications, on aboutit à : $T'_f = \frac{T_i}{\gamma} \left(1 + (\gamma-1) \frac{P_f}{P_i} \right)$ A.N.: $T'_f = 1071 \text{ K} > T_f$.

3°) $\Delta U' = W' = \frac{nR}{\gamma-1} (T'_f - T_i) = \frac{P_i V_i}{\gamma-1} \left(\frac{T'_f}{T_i} - 1 \right)$ ce qui permet de comparer les travaux reçus

dans les deux cas (température T_f ou T'_f). $\Delta U < \Delta U'$.

5. Compression isotherme ou monotherme d'un gaz parfait :

1°) Transformation isotherme (et donc quasi statique) d'un gaz parfait.

$\delta W = -P_{\text{ext}} \cdot dV$. La transformation emprunte un chemin réversible, donc quasistatique : $P = P_{\text{ext}}$.

Elle concerne un Gaz Parfait, respectant : $P = nRT/V$

Elle est isotherme : $T = T_o = \text{cste}$ tout au long du chemin suivi lors de la transformation.

Il vient donc : $\delta W = -nRT_o \cdot dV/V$ qui s'intègre en : $W = -nRT_o \cdot \ln(V_f/V_i)$

avec $P_i V_i = P_f V_f = nRT_o$ donc : $V_f/V_i = P_i/P_f$ où $P_i = P_o$ et $P_f = P_o + mg/S$

Soit finalement : $W = nRT_o \ln \left(1 + \frac{mg}{P_o S} \right)$.

Comme $T_i = T_f$ et que l'on a un GP : $\Delta U = 0$. D'où par le premier principe : $Q = -W$.

A l'état final, $V_f = S \cdot h_f$ avec $V_f = V_i \cdot (P_i / P_f)$ où $V_i = S h_o$.

Il vient : $h_f = h_o \cdot \frac{P_o}{P_o + \frac{mg}{S}}$ et $V_f = S \cdot h_o \cdot \frac{P_o}{P_o + \frac{mg}{S}}$ AN :). $h = 0,67 \text{ m}$; $W = 405 \text{ J}$.

2°) Transformation monotherme. Elle ne sera pas quasi-statique, ou du moins la température T du système ne restera pas invariante dans la transformation (et l'on ne connaît pas son évolution de façon simple et précise). Par contre, l'évolution est monobare : $P_{\text{ext}} = \text{Cste} = P_o + mg/S$.

On calcule donc facilement : $W = \int_{EI}^{EF} -P_{\text{ext}} dV = \int_{EI}^{EF} - \left(P_o + \frac{mg}{S} \right) dV = - \left(P_o + \frac{mg}{S} \right) (V_f - V_i)$

L'équilibre final du gaz reste néanmoins identique : $P_f = P_{\text{ext}} = P_o + mg/S$, $T_f = T_o$ et donc V_f et h_f restent inchangés.

Le travail reçu par le gaz est différent, mais le bilan énergétique s'écrit toujours :

$\Delta U = Q + W = 0$ puisque la température initiale et la température finale restent identiques.

Il vient donc $Q = -W = \left(P_o + \frac{mg}{S} \right) (V_f - V_i)$. AN : , $h_f = 0,67 \text{ m}$ inchangée. $W = -Q = 500 \text{ J}$

6. Pertes thermiques :

$\delta Q_{\text{pertes}} = K(T(t) - T_o) \cdot dt$; système = {maison} de capacité thermique C_p .

Le système subit une évolution isobare = $P = P_{\text{atm}} = \text{Cste}$.

Ecrivons un bilan thermique sur une durée dt :

EI : $T(t) \rightarrow$ EF : $T(t + dt) = T(t) + dT$

On raisonne sur l'enthalpie : $dH = H(t+dt) - H(t) = \delta Q$

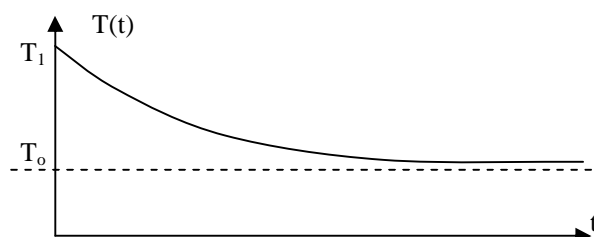
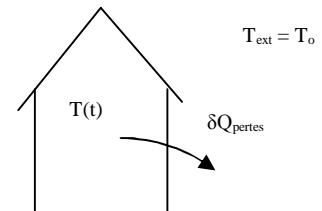
où δQ est l'énergie reçue par transfert thermique par la maison : $\delta Q = -\delta Q_{\text{pertes}}$.

et $dH = C_p \cdot dT$ puisque la transformation est isobare.

D'où l'équation : $C_p \cdot dT = -K(T(t) - T_o) \cdot dt$

Séparons les variables : $\frac{dT}{T(t) - T_o} = -\frac{K}{C_p} dt$ qui s'intègre entre $T(t=0) = T_1$ et $T(t)$:

$\ln \frac{T(t) - T_o}{T_1 - T_o} = -\frac{K \cdot t}{C_p}$ soit en passant à l'exponentielle : $T(t) = T_o + (T_1 - T_o) e^{-Kt/C_p}$



7. moteur à air comprimé.

1°) Le travail sur le cycle est négatif (sens horaire, travail moteur). Ce travail est opposé à l'air algébrique du cycle, cette aire est celle d'un rectangle : $W_{cy} = -A = -(P_1 - P_2) \cdot (V_B - V_A)$.

AN : $W_{cy} = -450 \text{ kJ}$.

Masse d'air consommée par cycle : $m = M \cdot (n_B - n_D)$ avec $n_B = P_1 \cdot V_B / (RT_1)$ et $n_D = P_2 \cdot V_D / (RT_2)$ en remarquant que $V_B = V_C$ et $n_B = n_C$ puisque l'on a une détente isochore d'un système fermé, ce qui conduit, par l'équation d'état du gaz parfait, à : $P_1/T_1 = P_2/T_2$.

D'où finalement : $m = \frac{MP_1}{RT_1} (V_B - V_D)$ AN : $m = 5,1 \text{ g}$

et donc le travail massique vaut $w = W/m = 89 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

2°) a) Cette fois : $m' = M(n_B - n_{D'})$.

On détermine l'état D' par le fait que D' et A appartiennent à la même courbe polytropique :

$P_{D'} \cdot V_{D'}^k = P_A \cdot V_A^k$ en remarquant bien que $n_A = n_{D'}$.

Il vient : $V_{D'} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/k} V_A$ AN : $V_{D'} = 0,18 \text{ L}$.

D'où : $m = \frac{MP_1}{RT_1} (V_B - V_{D'})$ AN : $m' = 4,3 \text{ g}$.

Remarque : l'entrée de matière se déroule au (1°) sur DA et AB tandis qu'elle n'a lieu que sur AB en (2°).

Evaluons les travaux sur les différentes parties du cycle :

AB isobare donc $W_{AB} = -P_1(V_B - V_A)$ AN : $W_{AB} = -540 \text{ J}$

$W_{BC} = 0$ car isochore

CD' isobare donc $W_{CD'} = -P_2(V_{D'} - V_C)$ AN : $W_{CD'} = +77 \text{ J}$

D'A polytropique. $W_{D'A} = \int_{EI}^{EF} -\frac{Cste}{V^k} dV$ car $P_{ext} = P = Cste/V^k$

qui s'intègre en $W_{D'A} = \frac{1}{k-1} (P_A V_A - P_{D'} V_{D'})$ AN : $W_{D'A} = +30 \text{ J}$

En sommant ces travaux : $W_{cy} = -430 \text{ J}$ et donc $w' = W_{cy} / m' = -100 \text{ J.kg}^{-1}$.

b) $|w'| > |w|$; la valeur du travail fourni est plus grande dans la seconde solution avec un accroissement de 12,5 %.

c) Représentation $P = f(v)$ où $v = V/m$ volume massique.

A et B ont même coordonnée (la variation du volume est due au seul apport de masse d'air).

Idem pour C et D.

Les transformations BC et DA ont lieu selon une verticale sur ces graphes puisque réalisées à masse et volume constant.

8. Piston à ressort :

1°) Energie apportée au système par chauffage électrique :

$Q_R = RI^2 \Delta t$ pour le système : {gaz, piston, ressort}.

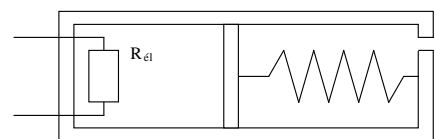
Le compartiment (1) contient : $n_o = (P_o V_o) / (RT_o)$

soit $n_o = 1$ mole de gaz parfait de capacité thermique molaire :

$C_{vm} = 5R/2$. (gaz diatomique aux conditions usuelles).

Bilan énergétique : $\Delta E_{tot} = \Delta U + \Delta E_p = Q_R + W$

avec $\Delta U = \Delta U_{gaz} = C_{vm}(T_f - T_o)$ et $\Delta E_p = (1/2)kx^2$, pour l'énergie potentielle élastique du ressort.



W est le travail des contraintes extérieures, exercées au niveau de la face externe du piston, par la force pressante imposée par l'atmosphère.

$$W = \int_{EI}^{EF} -P_{ext} dV = \int_{EI}^{EF} -P_o dV = -P_o xS < 0 \quad (\text{détente})$$

Il vient donc : $\frac{5}{2} R(T_f - T_o) + \frac{1}{2} kx^2 = RI^2 \Delta t - P_o xS$

2°) Il faut déterminer l'état final du système {gaz dans le compartiment (1)}. $P_f, V_f = xS + V_o, T_f$.
L'équilibre mécanique du piston impose : $P_f.S = kx + P_o.S$

Le terme kx correspond à la force exercée par le ressort et le terme $P_o.S$ est la force pressante due à l'atmosphère.

L'équation d'état donne pour le gaz parfait : $P_f.(V_o + xS) = RT_f$.

Il vient : $RT_f = kx^2 + kxV_o/S + P_o xS + P_o V_o$

En injectant ce résultat dans le bilan énergétique du 1°), on tire une équation du second degré sur x : $3kx^2 + (5/2)kxV_o/S + (7/2)P_o xS - RI^2 \Delta t = 0$

soit numériquement : $3.10^4 .x^2 + 3,3.10^4 .x - 2.10^3 = 0$

de solutions : $x = 0,057$ et $x = -1,15$ (aberrante). On a donc un déplacement de 5,7 cm du piston, chaque compartiment ayant initialement une longueur $V_o/S = 10$ cm.

3°) Pour le système : {gaz dans le compartiment (1)}, le bilan énergétique s'écrit : $C_{vm}(T_f - T_o) = RI^2 \Delta t + W_1$

où $W_1 = -W_2$, W_2 étant le travail reçu par le gaz du compartiment (2).

Ce dernier travail est assez aisé à exprimer, puisqu'il a lieu selon une transformation isotherme, et donc quasi-statique :

$$W = \int_{EI}^{EF} -P_{ext} dV_2 = \int_{EI}^{EF} -nRT_o \frac{dV_2}{V_2} \quad \text{avec à l'EI : } V_2 = V_o \text{ et à l'état final : } V_2 = V_o - xS.$$

On obtient : $W_2 = -RT_o \ln\left(1 - \frac{xS}{V_o}\right)$

A l'équilibre final, l'équilibre mécanique du piston nécessite : $P_{f1} = P_{f2} = P_f$

avec d'après l'équation du gaz parfait :

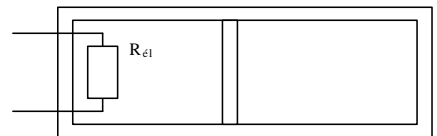
pour le compartiment (1) : $P_f = \frac{RT_f}{V_o + xS}$ pour le compartiment (2) : $P_f = \frac{RT_o}{V_o - xS}$

Il vient : $\frac{5}{2} RT_o \left(\frac{V_o + xS - V_o + xS}{V_o - xS} \right) = RI^2 \Delta t + RT_o \ln\left(1 - \frac{xS}{V_o}\right)$

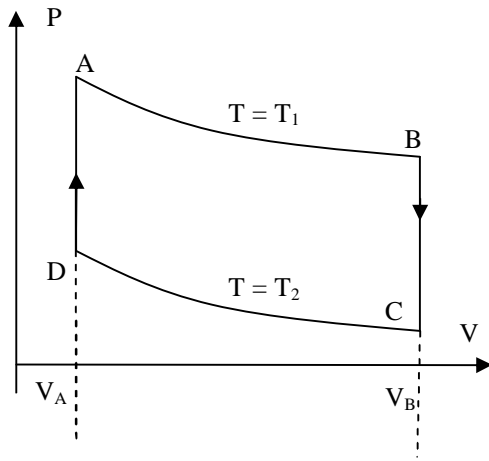
Posons : $\varepsilon = xS/V_o$. On a donc : $\frac{5}{2} RT_o \left(\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) = RI^2 \Delta t + RT_o \ln(1-\varepsilon)$

soit numériquement : $= 2.10^3 + 2,43.10^3 \left[\ln(1-\varepsilon) - \frac{5\varepsilon}{1-\varepsilon} \right]$

De solution : $\varepsilon = 0,12$ et donc $x = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm}$.



9. Etude d'un cycle de Stirling. rendement thermodynamique.



1°) $T_1 > T_2$, donc pour un même volume $V_A = V_D$, on aura $P_A > P_D$.
Le cycle, moteur, doit être parcouru dans le sens horaire.

A→B : isotherme donc par la première loi de Joule : $\Delta U = 0$, donc $Q_{AB} = -W_{AB}$, avec ici $W_{AB} < 0$ (détente) ; donc $Q_{AB} > 0$.

B→C : isochore. $\Delta U = Q_{BC}$
d'où $Q_{BC} = mc_v(T_2 - T_1) < 0$.

C→D : isotherme donc par la première loi de Joule : $\Delta U = 0$, donc $Q_{CD} = -W_{CD}$, avec ici $W_{CD} > 0$ (compression) ; donc $Q_{CD} < 0$.

D→A : isochore. $\Delta U = Q_{DA}$ d'où $Q_{DA} = mc_v(T_1 - T_2) > 0$.

Remarquons que : $Q_{BC} + Q_{DA} = 0$.

2°) Q_1 est le transfert thermique reçu à la température T_1 (isotherme AB).

$$Q_1 = -W_{AB} \text{ avec : } W = \int_{V_i}^{V_f} -P_{ext} dV = \int_{V_i}^{V_f} -nRT_1 \frac{dV}{V} \text{ donc } Q_1 = nRT_1 \ln(V_B/V_A)$$

Or $nRT_2 = P_C V_C$ et $nRT_1 = P_A V_A$ et $V_B = V_C$.

D'où $V_B/V_A = (T_2/T_1) \cdot (P_A/P_C) = (nRT_2)/(P_C V_A)$.

$$\text{Finalement : } Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{nRT_2}{P_C V_A}\right)$$

De même, Q_2 est le transfert thermique reçu à la température T_2 (isotherme CD).

$$Q_2 = -W_{CD} \text{ avec : } W = \int_{V_i}^{V_f} -P_{ext} dV = \int_{V_i}^{V_f} -nRT_2 \frac{dV}{V} \text{ donc } Q_2 = nRT_2 \ln(V_D/V_C)$$

Or $nRT_2 = P_C V_C$ et $nRT_1 = P_A V_A$ et $V_D = V_A$.

D'où $V_D/V_C = (P_C V_A)/(nRT_2)$.

$$\text{Finalement : } Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{P_C V_A}{nRT_2}\right)$$

Calcul du rendement du moteur : $\rho = -W_{cy}/Q_1$.

Par le premier principe, écrit sur le cycle : $\Delta U = 0 = Q_1 + Q_2 + W_{cy}$ donc $-W_{cy} = Q_1 + Q_2$

$$\text{Il vient : } \rho = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{nRT_2 \ln\left(\frac{P_C V_A}{nRT_2}\right)}{-nRT_1 \ln\left(\frac{P_C V_A}{nRT_2}\right)} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{on constate : } \rho = \rho_{\text{carnot}}$$

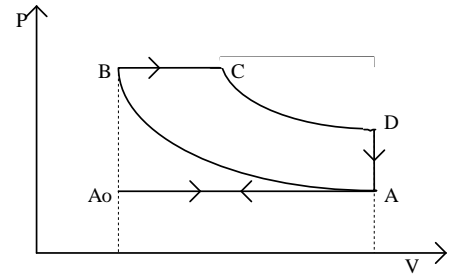
10. Cycle d'un moteur Diesel.

Analyse des transferts thermiques reçus :

A→B et C→D : transformations adiabatiques : $Q = 0$;

B→C : isobare : $Q_{BC} = \Delta H = C_p(T_C - T_B) > 0$ (phase de combustion avec injection) ;

D→A : isochore : $Q_{DA} = \Delta U = C_v(T_A - T_D) < 0$ (refroidissement) ;



Par le premier principe, écrit sur le cycle : $\Delta U = 0 = Q_{BC} + Q_{DA} + W_{cy}$

donc $-W_{cy} = Q_{BC} + Q_{DA}$

soit : $\eta = -W / Q_{BC} = 1 + Q_{BC} / Q_{DA}$.

Ceci amène : $\eta = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{T_A - T_D}{\gamma(T_C - T_B)}$

On relie les températures par les adiabatiques répondant à la loi de Laplace : $T.V^{\gamma-1} = Cste$

Il vient : $T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B} \right)^{\gamma-1} = T_A a^{\gamma-1}$ et $T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} = T_C b^{1-\gamma}$

B et C étant de même pression : $P_B = P_C = nRT_B/V_B = nRT_C/V_C$ dont on tire $T_C = T_B(a/b)$.

Donc : $T_C = T_A a^\gamma / b$ et $T_D = T_A (a/b)^\gamma$.

En rassemblant ces informations on obtient finalement :
$$\eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \times \frac{a^{-\gamma} - b^{-\gamma}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$