Gaz Parfaits

1. Masse d'air dans une pièce :

1°) la masse m d'air répond à m = ρ.V. La masse volumique ρ de l'air dépendra des conditions de température et de pression. n l'exprime à partir de l'équation d'état : PV = nRT.
ρ est la masse par unité de volume, donc la masse de n mole divisée par le volume correspondant : $\rho = \frac{nM}{V} = \frac{nM}{nRT\frac{1}{P}} = \frac{PM}{RT}$

D'où finalement : $m = \frac{PMV}{RT}$ où V = S.h AN : m = 75 kg

2°) On modifie les valeurs de P et T et l'on obtient : m' = 70 kg.

$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{m'-m}{m} = -0,067$ soit -6,7 %.

2. Gonflage d'un pneu à l'aide d'air comprimé :

a) Système = {air contenu dans le pneu}
En roulant le pneu s'est échauffé : sa température a augmenté. La quantité d'air est la même à l'état initial et à l'état final.

EI : P = 2,1 bar ; t = 20°C soit T = 293 K ; $V = V_i$
EF : P = 2,3 bar ; t = t' soit T = T' ; $V = V_i$ (pneu non déformé).

Par l'équation d'état : $n = \frac{PV}{RT} = \frac{P_iV_i}{RT} = \frac{P_fV_i}{RT'}$ d'où T' = T.(P'/P)
AN : T' = 321 K soit 48°C.

b) Système = {air initialement contenu dans la bouteille}.
On fait une détente isotherme (T = cste) pour ce système fermé (n = cste).
EI : $V = V_b = 60,0$ L $= 0,0600$ m^3 ; $P_b = 15,0$ bar
EF : V_f ; $P_f = 1,00$ bar.

$V_f = P_b.V_b/P_f = 900$ L.
Le volume extrait est donc $V_b - V_f = 840$ L puisqu'en fin de processus il restera 60 L d'air dans la bouteille, sous la pression de 1,00 bar.

c) Faisons un bilan des moles d'air.
Air contenu initialement dans la bouteille. $V = V_b = 60,0$ L $= 0,0600$ m^3 ; $P_b = 15,0$ bar

$n_b = \frac{P_bV_b}{RT}$

Δn moles sont passées dans le pneu. Δn est la différence entre le nombre de moles présentes dans le pneu en fin de gonflage et le nombre de mole qu'il contenait initialement.

$\Delta n = n_{pf} - n_{pi}$ soit : $\Delta n = \frac{P_fV_p - P_iV_p}{RT}$ avec $P_i = 1,00$ bar et $P_f = 2,6$ bar.

Déterminons la pression P_1 dans la bouteille après le gonflage d'un pneu. Le nombre de moles restant alors dans la bouteille est : $n_1 = n_b - \Delta n$ soit en explicitant ces quantités de moles selon l'équation d'état : $\frac{P_1V_b}{RT} = \frac{P_bV_b}{RT} - \frac{(P_f - P_i)V_p}{RT}$

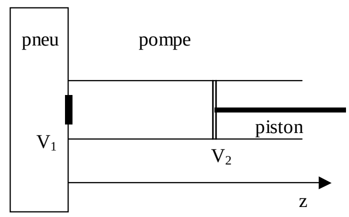
soit : $P_1 = P_b - \left(P_f - P_i\right)\dfrac{V_p}{V_b}$ AN : P_1 = 13,7 bar.

Le nombre k de pneus est déterminé par le nombre de termes Δn que l'on peut tirer avant que la pression de la bouteille atteigne 2,6 bar (P_f) : $n_b - k.\Delta n \geq \dfrac{P_f V_b}{RT}$

soit $k \leq \dfrac{n_b - \dfrac{P_f V_b}{RT}}{\Delta n} = \dfrac{P_b V_b - P_f V_b}{P_f V_p - P_i V_p}$.

k est un entier naturel (nombre de pneus), c'est la partie entière du résultat précédent. k = 9.

3. Gonflage isotherme d'un pneu de vélo :



1°) Système = {air contenu dans la pompe à t = 0}
EI : V_i = S.L : $T_i = T_o$; $P_i = P_o$.
EF : la valve s'ouvre quand la pression atteint $P_f = P_{n-1}$.
Alors V_f = S.z ; $T_f = T_o$ (pompage isotherme).
Le nombre de mole est conservé sur la transformation :
$\dfrac{P_{n-1}Sz}{RT_o} = \dfrac{P_o SL}{RT_o}$ d'où z = $\dfrac{P_o L}{P_{n-1}}$

2°) Système = {air contenu dans la pompe + air contenu dans le pneu}.
C'est un système fermé (n_o = cste).
Le nombre de mole total s'obtient en considérant l'état initial correspondant à l'ouverture de la valve : la pression vaut alors P_{n-1} dans tout le système. n = $(P_{n-1}/RT_o).(V_p + S.z)$.
A l'état final : le piston de la pompe a chassé l'air contenu dans le corps de pompe entièrement dans le pneu : $n_o = P_n.V_p/(RT_o)$

On tire : $P_n = P_{n-1}.\left(1+\dfrac{Sz}{V_p}\right) = P_{n-1}\left(1+\dfrac{P_o SL}{V_p P_{n-1}}\right) = P_{n-1} + \dfrac{P_o SL}{V_p}$

Par récurrence : $P_n == Pi + n\dfrac{P_o SL}{V_p}$ où n est le nombre de coups de pompe.

3°) $P_i = P_o$ et l'on cherche n tel que $P_n = P_f$.
$n = \left(\dfrac{P_f - P_o}{P_o}\right).\dfrac{V_p}{SL}$ avec $V_p = 2\pi R.\pi D^2/4$ (volume d'un tore)
En fait, n étant un entier, n vaudra la partie entière de cette quantité plus 1. AN : n = 35.

4. Thermomètre différentiel à gaz :

D'après l'équation du gaz parfait : $nR = P_o.V_o/T_o$ identique de part et d'autre de l'indice.
Après un déplacement x de l'indice de la gauche vers la droite, le volume à gauche devient Vg = Vo + xS et celui à droite devient V_d = Vo – xS.
La conservation du nombre de mole à gauche comme à droite amène :

$$nR = \frac{P_d\left(V_o - xS\right)}{T'} = \frac{P_g\left(V_o + xS\right)}{T}$$

L'équilibre mécanique de l'indice est obtenu quand $P_d = P_g$.

On déduit : $T' = T\dfrac{V_o - xS}{V_o + xS} = T\left(1 - \dfrac{xS}{V_o}\right)\left(1 + \dfrac{xS}{V_o}\right)^{-1}$

Comme xS << V_o on peut faire un D.L au premier ordre de l'expression :

$T' \simeq T\left(1 - \dfrac{xS}{V_o}\right)\left(1 - \dfrac{xS}{V_o}\right) \simeq T\left(1 - \dfrac{2xS}{V_o}\right)$ (on ne conserve que les termes d'ordre 1 en xS/V_o).

5. Compression isotherme et compression poly-tropique :

1. Système = {air enfermé dans le cylindre}. La hauteur initiale est déterminée par $V_o = S.h_i$ donc $h_i = V_o/S$ AN : $h_i = 0{,}90$ m (attention aux unités).

L'état final est obtenu par une condition d'équilibre thermique : $T_f = T_o$ (transformation monotherme) et une condition d'équilibre mécanique : les forces s'exerçant sur les faces interne et externe du piston doivent se compenser. Il faut prendre en compte les forces pressantes ainsi que le poids de la masse m ajoutée sur le piston (le piston lui-même est de masse négligeable).

$P_oS + mg - P_fS = 0$ soit : $P_f = P_o + mg/S$

La conservation du nombre de mole dans le cylindre amène : $P_o.V_o = P_f.V_f$

D'où la hauteur finale : $h_f = \dfrac{V_f}{S} = \dfrac{P_o.V_o}{S\left(P_o + \dfrac{mg}{S}\right)}$. AN : $h_f = 0{,}45$ m. (attention aux unités).

Remarque : la transformation étant monotherme, mais non isotherme, la température du gaz va certainement, et de façon transitoire, augmenter durant la transformation pour revenir finalement à l'équilibre thermique. Le calcul de cette variation de température n'est pas envisageable sans faire de bilan énergétique au cours de la transformation.

2. Même type de question, mais ici les parois du cylindre étant athermanes et non plus diathermes (c'est-à-dire que maintenant ces parois sont thermiquement isolées), la température finale du piston sera modifiée.

La transformation, supposée polytropique, suivra la loi : $P.V^k = \text{cste}$

A l'état final, on aura donc toujours : $P_f = P_o + mg/S$

et par la loi polytropique : $P_f.V_f^k = P_o.V_o^k$

D'où : $V_f = V_o.(P_o/P_f)^{1/k}$ soit : $V_f = V_o\left(\dfrac{P_o}{P_o + \dfrac{mg}{S}}\right)^{1/k}$

et donc $h_f = V_f/S$. AN : $h_f = 0{,}51$ m.