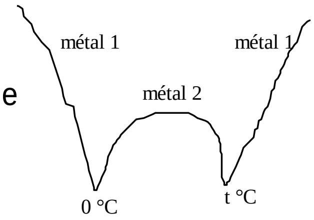
TEMPERATURE. PRESSION. STATIQUE DES FLUIDES.

1. Thermomètre à thermocouple :



1°) avec les mesures à 50 °C et 250 °C, on détermine a et b par un système de deux équations à deux inconnues :

E(50) = 1,114 mV = a.50 + b.50²

E(250) = 7,436 mV = a.250 + b.250²

Pour t = 0°C, par le principe même du fonctionnement du thermocouple, E = 0 mV, ce qui correspond bien à l'absence de terme constant dans la fonction E(t) = a.t + b.t².

On tire b = $3{,}732.10^{-5}$ mV.°C^{-2} et a = $2{,}041.10^{-2}$ mV.°C^{-1}.

En utilisant l'expression obtenue ainsi pour E(t), on calcule pour t = 150°C : E = 3,901 mV ce qui est cohérent.

2°) E = 0 pour t = 0, donc : E = k.t = $2{,}974.10^{-2}$ t en mV/°C.

Pour trouver l'écart de température est maximale entre les deux échelles, on va étudier cet écart Δt = t' – t avec t' = E/k et t solution (positive) de E = a.t + bt² soit $t = \frac{-a+\sqrt{a^2+4Eb}}{2b}$

donc $\Delta t = \frac{E}{k} - \sqrt{\frac{E}{b}+\frac{a^2}{4b^2}} + \frac{a}{2b}$

Le maximum de Δt correspond à la valeur E_{max} de E telle que d(Δt)/dE = 0, ce qui conduit après calculs à :

$E_{max} = \frac{k^2-a^2}{4b}$ Numériquement : E_{max} = 3,134 mV ; t_{max} = 125 °C.

2. Evolution de la pression dans un fluide :

1°) La loi fondamentale de la statique des fluides amène : dP/dz = ρg. Attention, z est dans le sens de la profondeur, donc dP/dz > 0. Il faut intégrer cette équation en tenant compte du fait que ρ dépend de P (masse volumique non uniforme).

dP/dz = ρ_og[1+a(P – P°)] donne en séparant les variables : $\frac{dP}{1+a(P-P°)} = \rho_o g dz$ qui s'intègre en : $\frac{1}{a}Ln\left[1+a(P-P°)\right] = \rho_o g z$ compte tenu de la condition limite : à z = 0, P = P°.

D'où : P = P° + 1/a (exp(a$\rho_o$gz)-1)

2°) Pour z faible, on peut faire un D.L. à lo'rdre 1 sur l'exponentielle : exp(a$\rho_o$gz) ≈ 1 + a$\rho_o$gz donc P = P°+ $\rho_o$gz , ce qui revient à considérer ρ = ρ_o = cste ;

3°) Application numérique : ΔP/P = 0,05 %.

3. Répartition de pression et température :

1°)Loi de la statique des fluides : dP/dz = -ρg (1) (z est l'altitude). Le fluide envisagé est un gaz.

Sa masse volumique n'est pas invariante. On l'exprime à partir de l'équation d'état des gaz parfaits. ρ = PM/RT (2) .

Les équations (1) et (2) donnent : $\frac{dP}{P} = \frac{-Mg}{RT}dz$ (3)

Mais T n'est pas non plus invariante : T varie avec z. Cherchant une équation sur T, on va éliminer dP/P de l'expression.

Pour cela, on doit employer la dernière information donnée sur l'atmosphère modélisée : l'équilibre adiabatique amène la relation : PV^γ = cste.

Relation que l'on peut aussi expliciter comme une relation entre P et T, en utilisant l'équation d'état : V = nRT/P qui amène : $P^{1-\gamma}T^\gamma$ = Cste (4).

Pour expliciter dP/P écrivons la différentielle logarithmique de (4) : $(1-\gamma)\dfrac{dP}{P}+\gamma\dfrac{dT}{T}=0$

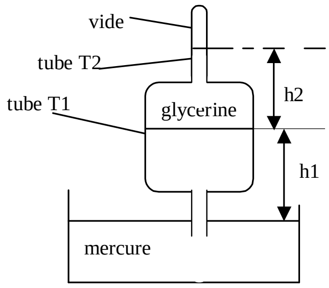
En injectant cette relation dans (3), il vient : $dT=\dfrac{1-\gamma}{\gamma}\dfrac{Mg}{R}dz$

L'intégration donne : $T = T_0 - \beta(\gamma-1)T_0\, z/\gamma$ avec la condition limite $T = T_o$ à z = 0.

2°) $P^{1-\gamma}T^\gamma$ = Cste amène : $P^{1-\gamma}T^\gamma = P^{\circ 1-\gamma}T_o^\gamma$ soit : $P=P^\circ\left(\dfrac{T_o}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ donc : $P = P_0[1 - \beta(\gamma-1)z/\gamma]^{\gamma/\gamma-1}$

3°) $\overrightarrow{grad}T=\dfrac{dT}{dz}\vec{e}_z$, dT/dz = $-9{,}98.10^{-3}$ K/m ; à 2300m : T = 270 K et P = $0{,}75.10^5$ Pa.

4. Baromètre différentiel à deux liquides :



1°) Dans les fluides incompressibles (comme la glycérine et le mercure), la pression va augmenter linéairement avec la profondeur.

En A, placé à l'interface glycérine/vide $P_A = P_{sat}(glyc.) \approx 0$. En B, à l'interface glycérine/mercure : $P_B = P_A + \rho_2 g h_2$. En C, de même cote que D, situé à l'interface mercure/air, $P_D = P_C$ avec $P_C = P_B + \rho_1 g h_1$ et $P_D = P°$.

On tire : $P° = g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)$

2°) On aura un déplacement z de l'interface glycérine/vide. Le tracé d'un schéma clair est indispensable pour comprendre la suite…

La conservation du volume de la glycérine implique d'avoir un déplacement Δz_1 de l'interface glycérine/mercure, avec $z.S_2 = \Delta z_1.S_1$.

La conservation du volume du mercure implique d'avoir un déplacement Δz_o de l'interface mercure/air (vers le haut !), avec $\Delta z_1.S_1= \Delta z_o.S_o$.

Exprimons les pressions par la même démarche qu'en 1°) : $P_A = P_{sat}(glyc.) \approx 0$.

En B, à l'interface glycérine/mercure : $P_B = P_A + \rho_2 g(h_2+z - \Delta z_1)$.

En C, de même cote que D, situé à l'interface mercure/air, $P_D = P_C$

avec $P_C = P_B + \rho_1 g(h_1 + \Delta z_1 + \Delta z_o)$ et $P_D = P° + \Delta P$.

On déduit alors : $\Delta P = gz[\rho_1 ((S_2/S_1)(S_1/S_o) + S_2/S_1) + \rho_2(1 - S_2/S_1)]$ AN : ΔP = 5,27 mbar ;

3°) σ = 5,68 mm/mbar pour le baromètre différentiel et σ' = 0,75 mm/mbar pour le baromètre de Torricelli, donc B = σ/σ' = 7,6.

5. Equilibre dans un tube en U :

1°) En les points A et A' situés respectivement aux interfaces air/huile et air/eau, on aura même pression, P_{atm} la pression atmosphérique.

En B, interface huile/eau : $P_B = P_{atm} + \rho_h.gh_1$ où $h_1$est la hauteur de la colonne d'huile.

Considérons le point C, situé à la même cote que B mais dans l'autre branche du tube en U. C étant situé à une dénivellation h_2 sous la surface de l'eau : $P_C = P_{atm} + \rho_e.g.\Delta h_1$, où Δh_1 est la dénivellation entre la surface libre de l'eau (point A') et l'interface huile / eau (point B).

Il vient : $\rho_h.h_1 = \rho_e \Delta h_1$

$h_1 = V/s$ est connu. Donc on tire : $\Delta h_1 = (\rho_h / \rho_e) V/s$.

La dénivellation Δh entre les deux surfaces libres sera $\Delta h = h_1 - \Delta h_1$ soit $\Delta h = h_1(1 - (\rho_h/\rho_e))$.

2°) Faire un schéma du problème (indispensable !). On note h_3 la hauteur de colonne d'acétone ajoutée sur l'eau. Δh_2 est la dénivellation entre l'interface huile/eau et l'interface acétone/eau.

Δh_3 étant l'écart de niveau entre les deux surfaces libres, sur les deux branches du tube en U :

$h_1 + \Delta h_3 = h_3 + \Delta h_2$

En écrivant l'évolution linéaire de la pression dans les fluides incompressibles :

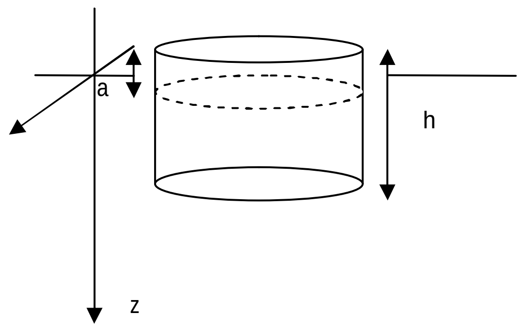
$P_B = P_{atm} + \rho_h.g.h_1$ et $P_C = P_B = P_{atm} + \rho_{ac}.g.h_3 + \rho_e.g.\Delta h_2$

On tire donc : $\rho_h.h_1 = \rho_{ac}.h_3 + \rho_e.\Delta h_2$ avec $h_1 = V/s$ et $h_3 = V'/s$

D'où : $\Delta h_2 = \frac{1}{\rho_e}\left(\frac{V}{s}\rho_h - \frac{V'}{s}\rho_{ac}\right)$ et $\Delta h_3 = \left(\frac{V'}{s} - \frac{V}{s}\right) + \Delta h_2$

AN : $\Delta h_1 = 5{,}4$ cm ; $\Delta h_2 = 2{,}5$ cm ; $\Delta h_3 = 1{,}5$ cm.

6. théorème d'Archimède. Corps partiellement immergé :



1°) La poussée d'Archimède est la résultante des forces pressantes agissant sur le solide immergé. La surface latérale du cylindre étant verticale, les forces pressantes qui s'y appliquent seront de direction horizontale. La pression étant identique en tout point de même profondeur dans le fluide, les forces pressantes exercées sur la surface latérale vont se compenser.

Seules les composantes verticales correspondant aux forces pressantes s'exerçant sur la face supérieure et la face inférieure du solide sont à prendre en compte :

$$\overrightarrow{\Pi_A} = \pi R^2 P(z=-a)\overrightarrow{e_z} - \pi R^2 P(z=h-a)\overrightarrow{e_z}$$

pour z = -a , P = P° (dans l'air) pour z = h – a, dans l'eau $P(z) = P° + \rho_e gz$

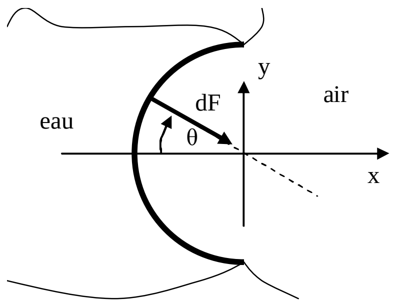
D'où : $\overrightarrow{\Pi_A} = -\pi R^2 \rho_e g(h-a)\overrightarrow{e_z} = -m_{déplacé}\vec{g}$

car la masse de fluide déplacé (on néglige la masse d'air) vaut : ρ_e. πR^2(h-a), le volume de glace immergé étant πR^2(h-a).

2°) Equilibre du glaçon quand la poussée d'Archimède compense son poids :

$\overrightarrow{\Pi_A} + m_{glace}\vec{g} = -\pi R^2 \rho_e g(h-a)\overrightarrow{e_z} + \rho_{gl}\pi R^2 h\vec{g}$ d'où : $a/h = 1 - \rho g/\rho_e = 0{,}08$;

3°) La force supplémentaire à imposer pour enfoncer le glaçon complètement dans l'eau correspond au poids du fluide supplémentaire à déplacer $\vec{F} = \rho_e \pi R^2 a\overrightarrow{e_z}$; elle ne change pas si l'on veut enfoncer le glaçon plus profondément, si l'on néglige l'évolution de ρ_e avec la profondeur. En effet, quelque soit sa position dans l'eau, la poussée d'Archimède restera identique. Néanmoins le déplacement du glaçon vers une plus forte profondeur nécessitera de faire travailler cette force, c'est-à-dire que cela demandera une dépense énergétique de la part de l'opérateur.



7. Effort supporté par un barrage-voûte :

On va procéder par une intégration vectorielle des participations de chaque surface élémentaire. Chaque élément de surface dS de la paroi du barrage va subir une force pressante $\overrightarrow{dF} = P(z)\overrightarrow{dS}$ qui lui est normale.

La pression dans l'eau varie selon : P(z) = P° + µgz   (fluide incompressible) en considérant z = 0 à la surface de l'eau et en orientant l'axe (Oz) vers le bas.

La pression dans l'air est P° en tout point. Les forces pressantes imposée sur dS par l'eau et par l'air sont de sens opposé.

Donc chaque élément de surface va subir : $\overrightarrow{dF} = \mu g z\overrightarrow{dS}$

La sommation des éléments de force doit être vectorielle. On va donc projeter ces éléments sur une base afin de sommer séparément les différentes composantes.

Pour chaque élément : $\overrightarrow{dF} = \mu g z dS\cos\theta\overrightarrow{e_x} + (-\mu g z dS\sin\theta)\overrightarrow{e_y}$

où dS est l'élément de surface cylindrique : dS = Rdθ.dz

La sommation se fera entre θ = -π/2 et θ = +π/2, et sur z entre 0 et h.

Les composantes selon (Oy) vont se compenser et mener à unes somme nulle, ce qui était prévisible vue la symétrie du problème.

Le calcul donne après intégration sur θ et z :

$$\iint \overrightarrow{dF} = R.\int_0^h \mu g z dz.\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\theta d\theta.\overrightarrow{e_x} + R.\int_0^h \mu g z dz.\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} -\sin\theta d\theta.\overrightarrow{e_y} = \mu g R h^2\overrightarrow{e_x}$$