Généralité du régime sinusoïdal forcé, développement en série de Fourier d'une fonction périodique ; Synthèse de Fourier

Introduction : synthèse de Fourier

Il est possible de reconstituer une signal périodique donné en sommant un ensemble de termes de termes sinusoïdaux, nommés termes harmoniques du signal.

Chacune de ces harmoniques est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_n multiple de la pulsation fondamentale $\omega = 2\pi/T$, où T est la période du signal à synthétiser.

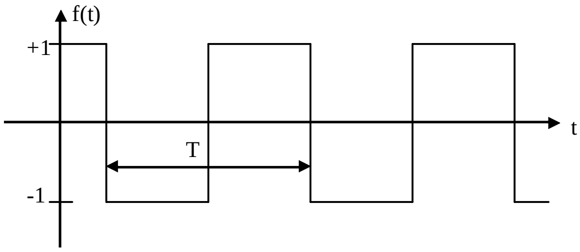
L'harmonique d'ordre n : Dn $\cos(n\omega t + \varphi_n)$ a donc une pulsation $\omega_n = 2\pi n/T = n\omega$.
Elle interviendra avec une amplitude égale à un coefficient D_n et avec une phase à l'origine φ_n qu'il est possible de calculer. (voir plus loin : décomposition du signal à synthétiser).

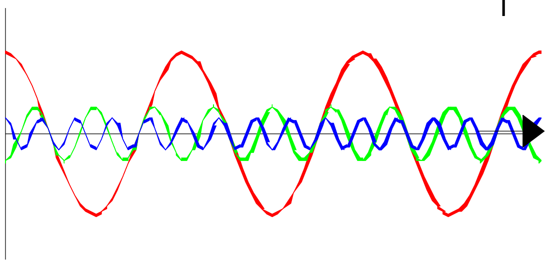
Il est présenté ci dessous, à titre d'exemple, une synthèse d'un signal créneau du type f(t) = +1 ou f(t) = -1. (la valeur moyenne du signal est nulle, et le signal est pair).

On notera que la "qualité" du signal synthétisé s'améliore avec le nombre d'harmoniques y intervenant.

Signal à synthétiser :

Posons : $\omega = 2\pi / T$.





Représentation des harmoniques 1, 3 et 5 sur un même graphe.

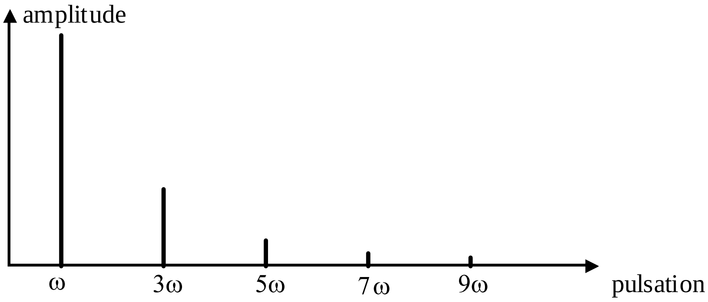
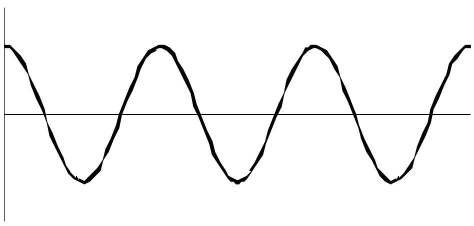
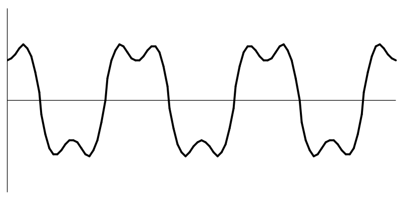


diagramme d'amplitude des harmoniques

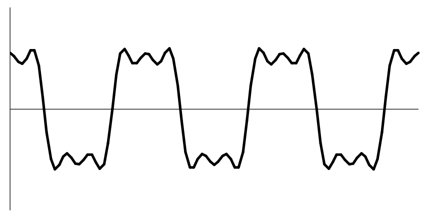
Harmonique de rang 1 : (fondamental)



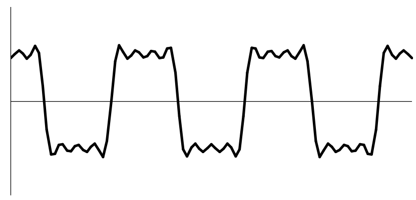
Somme des harmoniques de rangs 1 et 3 :



Somme des harmoniques de rangs 1,3 et 5 :

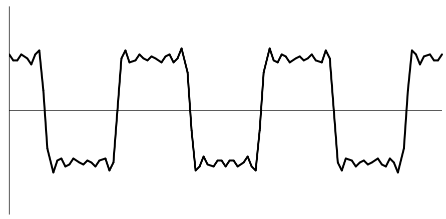


Somme des harmoniques de rangs 1, 3, 5 et 7



Somme des harmoniques de rangs 1, 3, 5, 7et 9 :

Le graphe de la fonction à synthétiser
 est déjà quasiment reconstitué, le signal obtenu s'identifie pratiquement à un signal créneau.



Ainsi, tout **signal périodique**, de forme quelconque, peut s'interpréter comme une **superposition de signaux sinusoïdaux** de différentes pulsations.
Il sera donc possible d'étudier la réponse d'un circuit électrique linéaire à un signal quelconque, en s'appuyant sur le théorème de superposition des états linéaires (théorème de Helmoltz) : cette réponse apparaîtra comme la somme des réponses relatives à chacun des termes sinusoïdaux composant le signal.

a) <u>Décomposition en série de Fourier d'un signal T-périodique :</u>

L'objet de ce chapitre n'est <u>en aucun cas</u> le calcul de décomposition. La mémorisation des formules de décomposition n'est pas demandée. L'objectif est de comprendre l'utilisation qui peut en être faite pour l'analyse d'un signal ou dans l'étude de la réponse d'un réseau linéaire à un signal périodique. Ce point de vue sera largement complété à l'occasion des TP-cours et TP.

Toute fonction f(t) réelle, périodique de période T = 2π/ω et bornée sur sa période (c'est à dire restant à des valeurs non infinies), est décomposable en une série, c'est à dire en une somme des termes d'une suite numérique :

$$f(t) = \sum_{n\to-\infty}^{n\to+\infty} C_n \exp(j.n\omega t) \qquad \text{(n entier relatif)}$$

La somme de la série obtenue est égale à la valeur de la fonction aux points de continuité, et à la moyenne arithmétique des limites de la fonction f à gauche et à droite aux points de discontinuité.

La fonction f(t) étant supposée réelle, les coefficients C_n et C_{-n} sont complexes conjugués et s'obtiennent par :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-j.n\omega t)dt$$

La fonction f(t) étant réelle, ce développement en série de Fourier peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{n\to\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)} \qquad \text{pour n entier naturel non nul.}$$

Les coefficients de la décomposition se calculent par :

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$ le premier terme a_o / 2 représente donc la valeur moyenne de f(t).

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t.dt$$ et $$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t.dt$$ pour n entier naturel non nul.

Soit donc : $\boxed{a_n = 2\langle f(t).\cos n\omega .t\rangle}$ et $\boxed{b_n = 2\langle f(t).\sin n\omega .t\rangle}$

On remarquera que :
- pour une fonction f(t) paire, soit telle que f(-t) = f(t), les coefficients b_n sont tous nuls, (la fonction sinus est impaire)
- pour une fonction f(t) impaire, soit telle que f(-t) = -f(t), les coefficients a_n sont tous nuls (la fonction cosinus est paire).

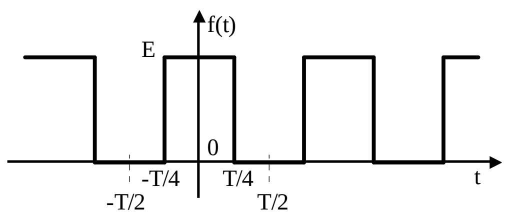
b) Signification physique :
Traduit d'un point de vue physique, un signal périodique f(t) quelconque (triangulaire, créneau, succession de rampes, ...) apparaît donc comme une somme de termes sinusoïdaux, de pulsations multiples de $\omega = 2\pi/T$, et de la valeur moyenne $\langle f(t)\rangle$ du signal.
cette valeur moyenne est nommée la **composante continue** du signal.
La composante sinusoïdale de pulsation ω, donc de période T identique à celle du signal, correspondant à n = 1 dans les formules précédentes, est nommée le **fondamental**.
Les termes de pusation nω (pour n > 1) sont nommés **harmoniques de rang n** du signal.

Le signal f(t) pourra aussi se décomposer sous la forme : $$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_1^{\infty} d_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

où : $d_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$; $\mathrm{tg}\varphi_n = -b_n/a_n$; $\cos\varphi_n = a_n/d_n$

par identification aux formules précédentes.

exemple de calcul :
Décomposition d'un signal créneau
Le signal f(t) admet un motif périodique de période T répondant à :
f(t) = E pour $-T/4 \leq t \leq +T/4$
f(t) = 0 pour $-T/2 \leq t \leq -T/4$ et $+T/4 \leq t \leq +T/2$.



F(t) est une fonction paire : f(-t) = f(t), donc les coefficients $b_n = 0$ (pas de termes en sin).

Calcul des coefficients a_n : $$\langle f(t)\rangle = \frac{a_o}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)dt = \frac{E}{2}$$;

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t).\cos\frac{2\pi .t}{T}dt = \frac{2}{T}E\frac{T}{2\pi}\left[\sin\frac{2\pi .t}{T}\right]_{-T/4}^{+T/4} = \frac{2E}{\pi}$$;

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t).\cos\frac{4\pi.t}{T}dt = \frac{2}{T}E\frac{T}{4\pi}\left[\sin\frac{4\pi.t}{T}\right]_{-T/4}^{+T/4} = 0 \quad ; \quad \text{etc.}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t).\cos\frac{2\pi n.t}{T}dt = \frac{2}{T}E\frac{T}{2\pi n}\left[\sin\frac{2\pi n.t}{T}\right]_{-T/4}^{+T/4}$$

Pour n pair, soit n = 2p, on aura : $a_n = 0$;

Pour n impair, soit n = 2p + 1, on aura : $a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^p E}{2p+1}$ (vérifier pour p = 1, 2, 3 ...)

D'où la décomposition de f(t) : $f(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p \cos(2p+1)\omega t}{2p+1}$ avec $\omega = 2\pi / T$.

c) Analyse spectrale :

La décomposition peut être décrite par un spectre d'amplitude, c'est à dire un graphe donnant les amplitudes d_n des différentes harmoniques, complété éventuellement par le spectre de phase donnant les φ_n.

Sur l'exemple précédent, le spectre d'amplitude ne fait apparaître de composantes que pour les harmoniques de rang impair. Le spectre de phase se réduit à une phase nulle pour toutes les harmoniques.

d) Conclusion, notion de linéarité :

La réponse d'un circuit linéaire à un signal périodique quelconque pourra donc être envisagée comme la superposition des réponses du circuit à chacun des termes de la décomposition en série de Fourier du signal (c'est à dire à chacune des harmoniques). C'est un cas d'application du **théorème de Helmoltz**. (voir exemples ultérieurs).

Revenons sur la **notion de linéarité** :

On qualifiera un système physique de linéaire lorsque, pour un signal d'entrée (ou une excitation) de pulsation ω, sinusoïdal, le système délivrera une réponse de même pulsation. Un tel système physique est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficient constants.

A l'inverse, un système non linéaire aura une réponse contenant un ou des termes de pulsation(s) différente(s) de celle du signal d'entrée. Ceci s'observera dans le cas de circuits électriques contenant des composants non linéaires comme des diodes par exemple (voir TP-cours ultérieur).

On retiendra qu'un **système linéaire** ne peut amener qu'un appauvrissement du spectre de la réponse par rapport à celui du signal d'entrée.(cas d'un montage électronique comprenant uniquement des composants linéaires tels que résistors, inductances, capacités, A.O. en régime linéaire).

Au contraire, un **système non linéaire** produira un enrichissement du spectre de la réponse par rapport à celui du signal d'entrée. (voir TP-cours et TP). (cas de circuits comprenant des diodes, un A.O. en régime non linéaire...).

« Aucun développement quantitatif sur l'analyse de Fourier n'est au programme de Sup PCSI. Le calcul analytique des coefficients du développement en série de Fourier est hors programme : il relève du cours de mathématiques de deuxième année ».

Les calculs précédents ont été présentés pour montrer qu'il est possible de déterminer la décomposition. Les notions à retenir se limitent aux aspects qualitatifs.

e) Formule de Parseval. Interprétation énergétique :

N.B. : cette partie constitue un complément de cours, qui ne figure pas au programme de Sup PCSI. elle est donnée à titre d'ouverture, et sa connaissance n'est pas exigible. Seul le résultat final (encadré) est à retenir.

f-1) Propriété péliminaire :

envisageons le cas d'un signal résultant de la somme de deux signaux sinusoïdaux :

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Calculons la valeur moyenne du carré de x(t) :

$$\langle x^2(t)\rangle = \langle (x_1(t) + x_2(t))^2\rangle = \langle x_1{}^2(t)\rangle + \langle x_2{}^2(t)\rangle + 2.\langle x_1(t).x_2(t)\rangle$$

Or le produit $x_1(t).x_2(t)$ est, comme produit de deux signaux de pulsations différentes, une somme de deux signaux sinusoïdaux de pulsation différence ($\omega_1 - \omega_2$) et somme ($\omega_1 + \omega_2$) :

$$x_1.x_2 = \frac{X_1 X_2}{2}\left(\cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] + \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2]\right)$$

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal de pulsation non nulle étant nulle : $\langle x_1(t).x_2(t)\rangle = 0$

d'où le résultat important : $\langle x^2(t)\rangle = \langle (x_1(t) + x_2(t))^2\rangle = \langle x_1{}^2(t)\rangle + \langle x_2{}^2(t)\rangle$

On interprète cette propriété en disant que deux signaux de deux pulsations différentes n'interfèrent pas (voir le cours d'optique ondulatoire de deuxième année)).

f-2) Formule de Parseval :

Pour un signal T-périodique x(t), on a par décomposition de Fourier :

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{n\to\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \qquad \text{avec } \omega = 2\pi/T.$$

En généralisant le principe précédent, on peut calculer la valeur moyenne de $x^2(t)$, compte tenu du fait que : $\langle \cos^2(\omega.t + \varphi)\rangle = \langle \sin^2(\omega.t + \varphi)\rangle = \frac{1}{2}$ et que les doubles produits ont une valeur moyenne nulle :

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt = \left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n{}^2 + b_n{}^2}{2}$$

f-3) Interprétation : conséquence physique.

La puissance moyenne absorbée dans un dipôle est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la tension ou de l'intensité : P = Re($\underline{Z}$) I² = Re($\underline{Y}$) U² où $\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ sont respectivement les impédance complexe et admittance complexe du dipôle considéré.

La puissance active est donc proportionnelle aux valeurs moyennes $\langle i^2(t)\rangle$ ou $\langle u^2(t)\rangle$.

Pour un signal T-périodique, on peut considérer sa décomposition en série de Fourier.

La puissance moyenne reçue par le dipôle à partir d'un signal T-périodique apparaît comme la somme des puissances moyennes dûes à chacun des termes de sa DSF. C'est à dire que la puissance moyenne est la somme des puissances moyennes dissipées par chaque harmonique dans le dipôle.