Compléments sur la réponse d'un quadripôle :
Réponse fréquentielle, réponse temporelle.

## I Equation différentielle entrée-sortie d'un système linéaire :

Nous avons vu, en introduction du cours sur le transfert d'un système linéaire, qu'un quadripôle linéaire recevant un signal e(t) en entrée et produisant un signal s(t) en sortie répondait à une équation différentielle linéaire de forme générale :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k s}{dt^k} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i e}{dt^i}$$

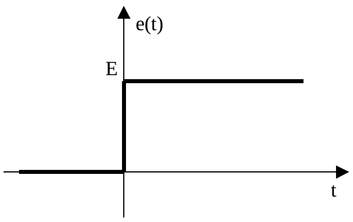
Expression dans laquelle les coefficients $a_i$ et $b_k$ sont réels et constants.

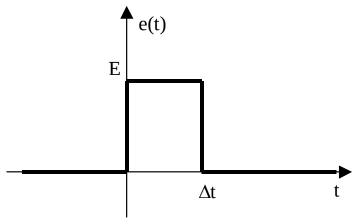
Le signal e(t) est en général quelconque, mais on examinera avec plus d'attention les cas suivants :

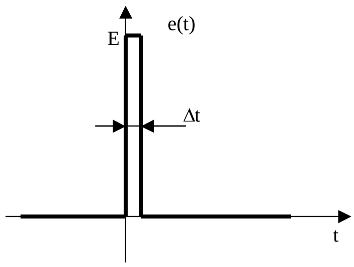
- signal constant : e(t) = E, alors s(t) = S est constante. C'est le cas du régime permanent ;

- échelon : e(t) = 0 si t < 0 et e(t) = E pour t ≥ 0, (fig 1)

- impulsion : e(t) = E si 0 ≤ t ≤ Δt et e(t) = 0 ailleurs. (fig 2) et plus particulièrement le cas d'une impulsion très brève définie par une durée Δt tendant vers 0 tandis que le produit Δt.E = Cste (fig 3). Ceci correspond en pratique à une impulsion de durée Δt faible devant la constante de temps du circuit, et d'amplitude suffisante.




- signal sinusoïdal : e(t) = E.cos (ωt ) , qui est le cas du régime sinusoïdal forcé ;

- signal périodique : il apparaîtra comme une somme de signaux sinusoïdaux par décomposition de Fourier.

- Le régime libre, pour lequel e(t) = 0 à tout instant, simplifie l'équation différentielle entrée / sortie :

  $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k s}{dt^k} = 0$ appelée équation différentielle homogène.

Il existera deux types d'analyse d'un système linéaire : ***l'analyse fréquentielle*** et l'***analyse temporelle***.

- Dans l'***analyse fréquentielle***, on se place dans le cas du régime sinusoïdal forcé. s(t) est alors une fonction sinusoïdale de même pulsation que e(t) : s(t) = S.cos(ωt + φ)
(on néglige le régime transitoire, supposé très bref, correspondant à la réponse en RSF à laquelle se superpose la réponse en régime libre).

En introduisant alors la notation complexe, on fait apparaître une relation entre $\underline{e}$ et $\underline{s}$ selon :

$\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \underline{H}(j\omega) = \underline{H}(\omega).\exp(j\varphi(\omega))$ où $\underline{H}(j\omega)$ est la fonction de transfert complexe

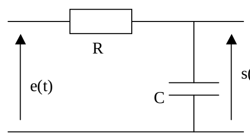
On étudiera le module H(ω) et la phase φ(ω) et l'on emploiera diverses représentations, (diagramme de Bode, de Nyquist, de Black ($G_{dB} = f(\varphi)$), ...)

- Dans l'***analyse temporelle***, on étudiera la réponse transitoire s(t) du système quand on applique :
  - un échelon : réponse indicielle
  - une impulsion (brève) : réponse impulsionnelle.

Ces deux approches, et leur confrontation, seront développées en TP-cours et TP.

## II Relation entre transfert et équation différentielle entrée-sortie, emploi de la variable de Laplace :

### *II-1 Cas d'un circuit du premier ordre :*




Prenons l'exemple du circuit RC passe-bas. L'équation différentielle du circuit s'obtient aisément :

i = C.ds/dt et e = R.i + s qui donne : $e = RC.\dfrac{ds}{dt} + s$

Cette équation différentielle aurait aussi pu être établie à partir du transfert complexe :

en remarquant un diviseur de tension (R, C), on calcule : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

soit avec la notation symbolique p = jω : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + p.RC} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ ( p = jω est la ***variable de Laplace***)

Or l'opérateur p. = jω. correspond à l'opérateur de dérivation temporelle d/dt.

La relation : $\underline{e} = (1 + p.RC)\,\underline{s}$ conduit donc directement à l'équation différentielle du circuit : $e = RC.\dfrac{ds}{dt} + s$.

*On retiendra qu'il peut être commode de passer par le calcul du transfert complexe, pour en déduire l'équation différentielle d'un circuit.*

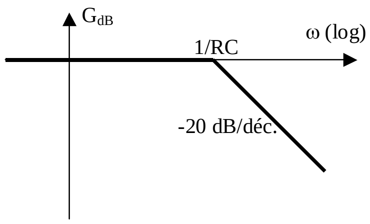
L'étude du circuit en régime libre (e = 0) demande la résolution de l'équation : $RC.\dfrac{ds}{dt} + s = 0$ (1).

Pour ce, on écrit l'équation caractéristique, obtenue en injectant dans (1) une solution de forme λ.exp(r.t) :

r.RC + 1 = 0, de solution : r = -1/RC.

D'où la solution en régime libre : s(t) = λ.exp(-t/RC).

Ce problème s'identifie formellement à la recherche d'un ***pôle*** pour la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$.
Par définition, un pôle $p_L$ doit annuler le polynôme en p situé au dénominateur de $\underline{H}(j\omega)$ : 1 + p.RC = 0

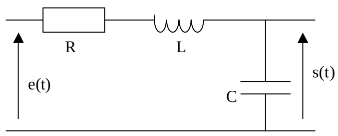



On obtient la solution : $p_L = -1/RC$

C'est un pôle réel, et négatif, qui va se traduire par une brisure de la courbe de gain asymptotique.

***II-2 Cas d'un système du second ordre :***

Nous prendrons cette fois l'exemple d'un circuit RLC série en sortie sur C.




Le calcul du transfert a été déjà traité :
$\underline{e} = (R + jL\omega + (1/jC\omega))\,\underline{i}$ et $\underline{s} = (1/jC\omega)\,\underline{i}$ mènent à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

On en déduit, en utilisant la variable de Laplace $p = j\omega$ : $\underline{e} = \underline{s} + p^2.LC.\underline{s} + p.RC.\underline{s}$

d'où l'équation différentielle : $e = LC.\dfrac{d^2s}{dt^2} + RC.\dfrac{ds}{dt} + s$

Là encore, la résolution de l'équation différentielle en régime libre (e = 0) va mettre en jeu une équation caractéristique : $r^2.LC + r.RC + 1 = 0$ formellement identique à l'équation correspondant à la recherche de pôles pour le transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$.: $p^2.LC + p.RC + 1 = 0$ .

La nature des solutions (réelles ou complexes) de l'équation caractéristique va dépendre du discriminant de cette équation du second degré. (voir chapitre III-2 suivant).

Conclusion : la relation formelle d/dt $\leftrightarrow$ $j\omega = p$ a été établie comme valide dans le cas de grandeurs sinusoïdales (notation complexe). La théorie de Fourier comprend la Décomposition en Série de Fourier pour des fonctions périodiques, mais s'étend aussi au cas de fonctions non périodiques par les Transformées de Fourier.

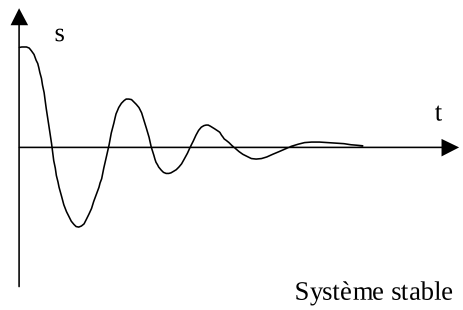
Ces considérations amènent à affirmer que toute fonction du temps peut se représenter comme une superposition de fonctions sinusoïdales. Un système linéaire présentera alors une réponse qui sera la superposition des réponses aux différents termes sinusoïdaux.

**La relation formelle d/dt $\leftrightarrow$ $j\omega = p$ permet donc d'aborder la mise en équation de régime non-sinusoïdaux (ou même de régimes transitoires) par le biais de la notation complexe, dans le seul cas de systèmes linéaires.**

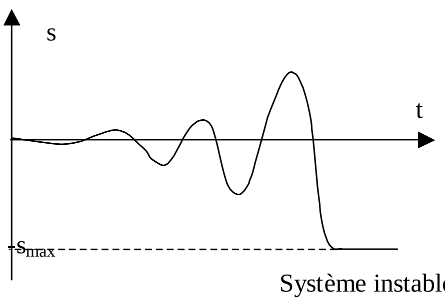
## III Stabilité d'un système linéaire :

***Définition*** : un système est dit stable lorsque la sortie s(t) reste bornée à tout instant.

Exemple d'évolution d'un système stable et d'un système instable, en régime libre :




Système stable




Système instable

L'évolution des grandeurs physiques dans un système instable est en pratique toujours limité par des phénomènes non linéaires (saturation...).
On remarquera que le fait qu'un système soit stable ou instable ne dépend pas du signal extérieur appliqué (e(t)) ; c'est une propriété intrinsèque du système.
**L'étude de la stabilité pourra donc se faire en choisissant le régime libre où e(t) = 0 à tout instant.**

L'étude fréquentielle permet de poser néanmoins une première condition de stabilité : le module du transfert ne doit diverger pour aucune valeur de la pulsation $\omega$.

La relation différentielle linéaire entrée / sortie : $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k s}{dt^k} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i e}{dt^i}$

S'écrit en notation complexe pour le régime sinusoïdal forcé : $\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k \underline{s} = \sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i \underline{e}$

ce qui mène au transfert complexe :

en notant p = j$\omega$ variable de Laplace : $$\underline{H}(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i p^i}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}$$

Le transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ apparaît donc comme un rapport de deux polynômes en p : $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{N}(j\omega)}{\underline{D}(j\omega)}$

Ce transfert verrait son module diverger lorsque la pulsation devient grande si le rang n du polynôme N était supérieur au rang m du polynôme D du dénominateur.

**Une première condition de stabilité est donc que le numérateur de la fonction de transfert doit avoir un rang m inférieur ou égal au rang n du dénominateur : m $\leq$ n**

***Cette condition est usuellement vérifiée pour les systèmes physiques, et est supposée l'être dans la suite du polycopié.***

***etc...***