CHAMP DE GRAVITATION.

Introduction :

Après avoir montré une analogie entre les champs de gravitation et les champs électrostatiques *(champs newtoniens)*, nous allons expliciter leurs propriétés communes, permettant d'appliquer un formalisme identique pour leur étude.

Nous verrons que du fait des lois :

$$\vec{F} = -\frac{KMm}{r^2}\vec{e_r} \quad \text{et} \quad \vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} \qquad \text{expressions comportant un facteur en } \frac{1}{r^2}\vec{e_r}$$

qui déterminent la structure du champ électrostatique et du champ de gravitation,

Le théorème de Gauss est applicable dans les deux cas.

Champs Newtoniens

1- Loi élémentaire d'attraction universelle :

Deux points matériels de masses m et m', placés à une distance r l'un de l'autre subissent une INTERACTION GRAVITATIONNELLE : $\boxed{\vec{F} = -\frac{Kmm'}{r^2}\vec{e}_r}$

La constante K dite CONSTANTE DE GRAVITATION a pour valeur :

K = 6,67.10^{-11} Nm^2 kg^{-2} .

On pourra mettre la force s'appliquant sur m sous la forme : $\vec{F} = m\vec{G}$ avec $\vec{G} = -\frac{Km'}{r^2}\vec{e_r}$.

$\vec{G}$ est nommé CHAMP DE GRAVITATION créé en M par la masse m'. De même qu'en électrostatique, ce champ est censé "exister" physiquement au point M, même en l'absence de la "masse d'épreuve" m impliquant la manifestation effective de l'interaction gravitationnelle.

2- Analogie avec la loi de Coulomb : $\boxed{\vec{F} = +\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}r}$

qui permet de faire apparaître le CHAMP ELECTROSTATIQUE en M, $\vec{E}$ tel que :

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

L'analogie est donc évidente : q est analogue à m ; q' est analogue à m' ; $\vec{E}$ est analogue à $\vec{G}$; $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ est analogue à (- K).

Remarquons dans les deux cas la DEPENDANCE EN $\frac{1}{r^2}$ des modules des champs, ainsi que des champs à géométrie radiale (c'est à dire orientés selon l'unitaire radial $\vec{e}_r$).

Il faut noter néanmoins quelques différences :

→ existence de charges électriques ≥ 0 ou ≤ 0, alors que les masses sont nécessairement ≥ 0.

Moins de variétés dans les distributions de masses (notamment pas de DIPOLES !).

→ deux charges de mêmes signes se repoussent, alors que deux masses s'attirent (constantes $\frac{+1}{4\pi\varepsilon_o}$ et - K).

→ ordres de grandeurs très différents :

Calculons, par exemple, les forces gravitationnelle fg et électrostatique fe dans le cas d'un e$^-$ et d'un proton, situés à une distance r. L'électron a pour charge -e et pour masse : $\frac{m_p}{1836}$; le proton est de charge +e et de masse m_p = 9,1.10^{-31} kg ; e = 1,6.10^{-19} C. On obtient un rapport : $\frac{fg}{fe} = 4,3.10^{-40}$

La gravitation peut donc être complètement négligée dans le domaine atomique. Elle ne donnera d'effets notables qu'au voisinage de masses très importantes, comme les astres.

3- Propriétés des champs newtoniens :

3-1 Potentiels des champs newtoniens :

Nous avions vu que le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par **n charges ponctuelles q_i placées à des distances r_i** d'un point **M**

DERIVE D'UN POTENTIEL ELECTROSTATIQUE : $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum \frac{q_i}{r_i}$

En procédant à un raisonnement analogue à celui qui avait été conduit dans le cours d'électrostatique, on peut considérer la **CIRCULATION ELEMENTAIRE du champ** $\vec{g}$ créé par une masse m' :

$$dC = \vec{G}.\vec{dl} = -\frac{Km'}{r^2}\vec{u}_r.\vec{dl} = -\frac{Km'}{r^2}dr$$

Qui apparaît de forme : $dC = \vec{G}.\vec{dl} = -d\varphi$ avec $\boxed{\varphi = -\frac{Km'}{r}}$ **Potentiel de gravitation.**

Par définition du gradient : ∀f, $\vec{grad}f.\vec{dl} = df$

$\vec{G}$ apparaît comme, au signe près, le gradient de φ :

$\vec{G} = -\vec{grad}\varphi$ On dira que le champ de gravitation dérive du potentiel φ.

Les expressions de φ se généralisent aux :

- cas d'une distribution discrète de masses : $\varphi = -K\sum\frac{m_i}{r_i}$
- cas d'une distribution continue de masses : $\varphi = -K\iiint_V \frac{\rho d\tau}{r}$

Conclusion :

Les champs newtoniens, dont le module décroît en $\frac{1}{r^2}$, dérivent de potentiels en $\frac{1}{r}$.

Remarques :

* le potentiel est une fonction continue ($\vec{G} = -\vec{grad}\varphi$ doit être défini) (sauf répartition linéiques),
* toute fonction potentiel est définie en fait à une constante additive près. Ici, comme en électrostatique, cette constante est usuellement choisie de façon que φ →0 quand on s'éloigne indéfiniment de la distribution c'est-à-dire quand tous les $r_i \to \infty$.
* dans le cas de masses situées à l'infini, la détermination de cette constante est arbitraire. (Voir cours d'électrostatique).

3-2- Energie potentielle :

La force électrostatique $\vec{f}_e = q\vec{E}$ dérive d'une **énergie potentielle** U telle que : $\vec{f}_e = -\vec{grad}U$

donc U=qV. De même, la force de gravitation s'exerçant sur la masse m, placée en un point M où règne un champ $\vec{G}$: $\vec{f}_g = m\vec{G}$ dérive de **l'énergie potentielle de gravitation** : U = mφ telle que : $\vec{f}_g = -\vec{grad}U$

3-3- Flux des champs newtoniens, théorème de Gauss :

On peut montrer que le flux du champ de gravitation créé par une masse m

- intérieure à une surface fermée quelconque vaut Φ = -4πKm,
- extérieure à une surface fermée quelconque : on obtient alors Φ = 0.

La généralisation de ces résultats au cas de distributions (discrètes ou continues) de masses constitue le théorème de Gauss :

Le flux du champ créé par une distribution de masse, sortant à travers une surface fermée ∑ se réduit au flux du champ créé par les masses INTERIEURES à cette surface. La contribution au flux des masses extérieurs est NULLE.

Ce flux vaut au total : $\boxed{\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{G}.d\vec{S} = -4\pi.K\left(\sum_i m_i\right)_{\text{int}}}$ ou

$\boxed{\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{G}.d\vec{S} = -4\pi.K\iiint_V \rho d\tau}$ V étant le volume délimité par la surface fermée ∑.

Il est aisé de retrouver l'énoncé du théorème de Gauss pour le champ de gravitation à partir de celui portant sur le champ électrostatique, en se fondant sur les analogies :

$\Phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}.d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\left(\sum_i q_i\right)_{\text{int}}$ conduit à l'expression précédente en remplaçant le champ électrostatique $\vec{E}$ par le champ de gravitation $\vec{G}$, les charges q_i par les masses m_i et la constante $1/\varepsilon_o$ par –4πK.

4 : Applications du théorème de Gauss :

4-1- Généralités :

Rappelons sommairement les principes guidant l'emploi du théorème de Gauss **pour le calcul de champs newtoniens** :

* A employer quand la SYMETRIE DU PROBLEME posé est suffisamment riche (symétrie sphérique, cylindrique, ou plane).

* Le CHOIX DE LA SURFACE fermée à travers laquelle on calcule le flux, dite SURFACE DE GAUSS, est essentiel. Elle doit passer au point où le champ est calculé. On choisira une surface composée de surfaces :

- soit équipotentielles, donc NORMALES AUX LIGNES DE CHAMP, prévues par la symétrie (usuellement : sphères, cylindre ou plan),
- soit colinéaires aux lignes de champ → $d\vec{S} \perp \vec{G}$ donc $\vec{G}.d\vec{S} = 0$.

* Tous les calculs conduits dans le chapitre d'électrostatique restent applicables pour la gravitation.
(voir exercices).

Remarque : Le théorème de Gauss est vérifié <u>en toute situation</u> pour un champ newtonien. Les principes précédents ne sont à respecter que dans le but du calcul de ce champ.

Nous allons maintenant envisager deux exemples correspondant à des problèmes concrets portant sur le champ de gravitation. (les questions du type "champ de gravitation créé par un fil massique" ne correspondant qu'à des cas d'école, sans intérêt pratique).

4-2- Attraction entre deux sphères :

Considérons deux sphères S_1 et S_2 , de centres O_1 et O_2 et de masses totales m_1 et m_2 , dont la REPARTITION DE MASSE à l'intérieur de chaque sphère est A SYMETRIE SPHERIQUE. On se propose de calculer la force s'exerçant entre ces deux sphères.
Considérons le CHAMP CREE PAR L'UNE DES SPHERES, en un point M extérieur :
Le problème est à symétrie sphérique.

Géométrie du champ $\vec{G}(M)$:

* doit être invariant par symétrie ou rotation autour de (OM).

$\vec{G}(M)$ est radial.

* la situation physique reste inchangée par un déplacement de M sur une sphère de rayon r, de centre O, c'est-à-dire par une rotation quelconque de M autour de O.

Le module de $\vec{G}(M)$ ne dépend que de r donc : $\vec{G}(M) = G(r)\vec{e}_r$

Surface de Gauss : surface équipotentielle : sphère de centre O, de rayon r.
Le calcul du flux donne : $\Phi(\vec{G}(M), \Sigma) = 4\pi r^2.G(r)$ et par ailleurs $\Phi(\vec{G}(M), \Sigma) = -4\pi Km$

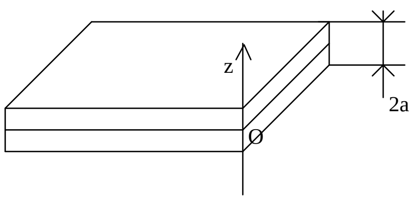
L'application du théorème de Gauss conduit donc à : $\vec{G}(M) = -\frac{Km}{r^2}\vec{e}_r$.

Le champ se réduit donc à celui créé par une masse ponctuelle, placée au centre de la sphère, de masse égale à la masse totale de la sphère.
La force exercée par S_1 sur S_2 est la même que celle exercée par une masse ponctuelle m_1 placée en O_1 sur S_2 .
D'après le principe de l'ACTION ET LA REACTION, cette force a même grandeur que celle exercée par S_2 sur la masse ponctuelle placée en O_1 .Pour ce dernier calcul, on peut remplacer S_2 par une masse ponctuelle m_2 placée en O_2 . d'où : $\vec{f} = -\frac{Km_1m_2}{r_2}\vec{e}_r$

La force exercée par les deux sphères est donc la même que si toute leur masse était concentrée en leur centre.
Ce résultat simplifie considérablement l'étude du mouvement des corps célestes.

4-3- Champ créé par un domaine massique limité par deux plans parallèles infinis :

C'est un cas concret, couramment rencontré dans les problèmes. Il correspond en pratique aux perturbations engendrées dans le champ de gravitation par l'ajout (ou le retrait) d'une tranche de matière plane, de grandes dimensions, d'épaisseur 2a, à la surface du sol.
($\rightarrow$ variation du niveau de l'eau d'un lac, perturbations dues à un plateau géologique, etc).



On envisage une couche plane de matière de masse volumique μ, et d'épaisseur 2a, supposée suffisamment grande pour être considérée comme infinie.

Par raison de symétrie, le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé par cette plaque est normal au plan.

En appliquant le théorème de Gauss à une "boîte à camenbert" centrée sur le plan médian et dont les couvercles ont pour cotes respectives z et -z on obtient pour expression du module de $\vec{G}(M)$:

- $G = 4\pi Kz\mu$ à l'intérieur de la plaque,
- $G = 4\pi Ka\mu$ à l'extérieur.

Par le principe de superposition, ce champ viendra s'ajouter vectoriellement au champ de gravitation terrestre.

Remarque : le calcul de la perturbation du champ gravitationnel engendré par la présence d'un plateau géologique doit en toute rigueur tenir compte de l'incidence de cette surcharge de la croûte terrestre sur la densité du magma sous-jacent.