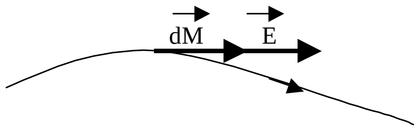
C Topographie électrostatique

Ce polycopié constitue essentiellement une synthèse de notions qui ont été précédemment évoquées en cours et TD.

I Définitions :

Ligne de champ : C'est une courbe orientée, telle que le champ électrostatique $\vec{E}$ lui soit tangent en chaque point ; elle est orientée dans le sens de $\vec{E}$.

Considérant un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$ le long de la ligne de champ, $\overrightarrow{dM}$ sera tangent à la ligne, donc $\overrightarrow{dM}$ sera colinéaire à $\vec{E}$ par définition.



Ceci se traduit mathématiquement par la relation :

$$\overrightarrow{dM} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (1)$$

ouverture (hors programme) : calcul des lignes de champ :

L'équation (1) conduit à un système différentiel dont la résolution mène aux équations des lignes de champ.

Par exemple dans un système cartésien (1) s'écrit : $\begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

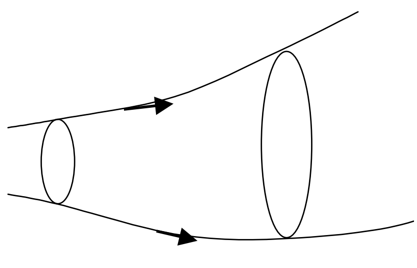
La connaissance de $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ et $E_z(x, y, z)$ permet d'intégrer et d'obtenir les équations des lignes.

Ainsi, le système : $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{E_z}{E_x} \\ \dfrac{dz}{dy} = \dfrac{E_z}{E_y} \end{cases}$ *donne accès à une relation en x, y et z de forme : $F(x, y, z) = 0$*

et le système : $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{E_y}{E_x} \\ \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{E_y}{E_z} \end{cases}$ *donne accès à une relation en x, y et z de forme : $G(x, y, z) = 0$.*

Chacune des relations définit une surface dans l'espace à trois dimensions, leur intersection détermine une courbe correspondant à une ligne de champ.
En fait, l'intégration du système différentiel conduit à une famille de courbes (du fait des constantes d'intégration), donc à l'ensemble des lignes de champ.
Le problème mathématique de ce calcul n'est pas simple et sera traité avec des méthodes numériques (informatiques) en général.

En pratique, nous verrons que l'allure des lignes de champ se trouvera assez aisément à partir de considérations de symétries sur la distribution qui crée ce champ.



Tube de champ :
c'est une surface engendrée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé C_f.

Surfaces équipotentielles :
Surfaces définie par l'équation $V(x, y, z) = V_o$,
ou $V(r, \theta, \varphi) = V_o$. C'est le lieu géométrique des points de potentiel V_o.

Exemple : pour une charge ponctuelle, les lignes de champ sont radiales, et les équipotentielles sont constituées de sphères centrées sur la position P de la charge.
($V(r) = q / 4\pi\varepsilon_o r$ = cste).

<u>II Propriétés :</u>

II-1 Propriétés topologiques :

(1) Les surfaces équipotentielles ne peuvent pas des couper. En effet, en une hypothétique intersection entre deux surfaces équipotentielles, on aurait deux valeurs différentes de potentiel en un même point, ce qui est aberrant.

(2) Les lignes de champ électrostatique sont orthogonales aux surfaces équipotentielles. Cette propriété résulte directement de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$.
Preuve : considérons un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dM}$ sur la surface équipotentielle. Par hypothèse, $\overrightarrow{dM}$ relie deux points M et M' de même potentiel : dV = 0.
Or –dV = $-\overrightarrow{gradV}.\overrightarrow{dM} = \vec{E}.\overrightarrow{dM}$. La condition dV = 0 implique donc que $\vec{E}$ est orthogonal à $\overrightarrow{dM}$.

(3) Les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants (le champ descend les potentiels).
En effet : $\vec{E}.\overrightarrow{dM} = -\overrightarrow{gradV}.\overrightarrow{dM} = -dV$, donc si $\overrightarrow{dM}$ est choisi de même sens que $\vec{E}$, un déplacement selon $\overrightarrow{dM}$ conduit à un –dV > 0, donc à dV < 0 : il y a diminution de V.

(4) Les lignes de champ ne peuvent pas être des courbes fermées. Puisque V doit décroître de façon monotone le long d'une ligne de champ.

II-2 Propriétés de symétrie :

Faisons un bilan, pour mémoire, des propriétés de symétrie du champ et du potentiel, déjà évoquées dans des chapitres antérieurs :

(1) $\vec{E}$ est un vecteur polaire ; il a les propriétés de symétrie de la distribution de charges qui le crée. Son sens a une signification physique intrinsèque (à la différence d'un vecteur axial ou pseudo-vecteur).

(2) En un point M appartenant à un plan de symétrie π de la distribution, $\vec{E}$(M) est colinéaire à ce plan de symétrie.

(3) En un point M appartenant à un plan d'antisymétrie $\bar{\pi}$ de la distribution, $\vec{E}$(M) est orthogonal à ce plan d'antisymétrie.

(4) Soient M et M', deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie π de la distribution. Alors $\vec{E}$(M') $=S_\pi[\vec{E}$(M)] et V(M) = V(M').

(5) Soient M et M', deux points symétriques par rapport à un plan d'antisymétrie $\overline{\pi}$ de la distribution. Alors $\vec{E}$ (M') = - S$\overline{\pi}$ [$\vec{E}$ (M)] .
La différence de potentiel entre M' et un point H appartenant à $\overline{\pi}$ est alors opposée à celle existant entre M et le même point de $\overline{\pi}$.

II-3 Continuité ou discontinuité de $\vec{E}$ et V :

Physiquement, le potentiel électrostatique V, comme le champ électrostatique $\vec{E}$ seront toujours continus ; dans les faits, les charges seront toujours distribuées continûment en volume.

Cependant, dans certains cas, le domaine de distribution (couche mince, fil,…) pourra conduire au choix d'une **modélisation** (surfacique, linéique) amenant des discontinuités mathématiques des fonctions V et $\vec{E}$.
Remarquons qu'une discontinuité du potentiel V en un point M donné fait, d'après la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$, que le champ n'y est pas défini.

Nous admettrons les résultats suivants :

(1) V et $\vec{E}$ sont continus pour toute distribution volumique de charges.

(2) V reste continu à la traversée d'une surface chargée. Mais cette modélisation surfacique va introduire une discontinuité pour le champ électrostatique $\vec{E}$.
Le théorème de Coulomb établit la valeur de cette discontinuité, pour la traversé d'une surface chargée de densité surfacique σ : $\Delta\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{n}$ où $\vec{n}$ est l'unitaire normal à la surface, défini dans le sens de la traversée.
Cette expression est non exigible, mais nous la vérifierons sur divers exemples.

(3) Une modélisation linéique ou une modélisation à charge(s) ponctuelle(s) introduisent une (ou des) singularité(s) pour V et $\vec{E}$ qui vont diverger , c'est à dire tendre vers l'infini (en module pour $\vec{E}$) lorsque l'on s'approche indéfiniment de la distribution.

La résolution des questions mathématiques assez paradoxales qui peuvent alors se poser est physiquement très simple : elle n'ont pas d'objet !
Il n'est physiquement pas pertinent de se questionner sur la valeur de V ou de $\vec{E}$ sur une surface chargée, en la position d'un fil chargé ou d'une charge ponctuelle : le modèle de distribution est alors inadapté.

Nous verrons ultérieurement que les conditions de continuité de V ou $\vec{E}$ pour les distributions concernées fourniront des relations permettant de préciser ces fonctions.