V SYMETRIES ET TOPOGRAPHIE DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

V-1 Caractère axial du champ magnétique et opérations de symétries :

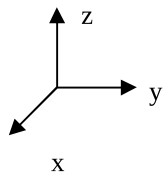
Pour une distribution D de courants permanents donnée, on peut définir le champ magnétostatique $\vec{B}$ produit en un point M par cette distribution à partir de la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \int_D \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} = \int_D \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{d\vec{C} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}$$

Chaque élément de courant $\overrightarrow{dC}$ est repéré par un point P, l'unitaire $\vec{u}_{PM}$ de la droite (PM) étant dirigé de P vers M.

Cette expression contient un produit vectoriel, ce qui confère un caractère de **pseudo-vecteur** à B (ou **vecteur axial**). Notamment, le sens de B est lié au choix conventionnel d'une orientation de l'espace.
En effet, la définition d'un trièdre de sens direct (x, y, z) est purement conventionnelle :

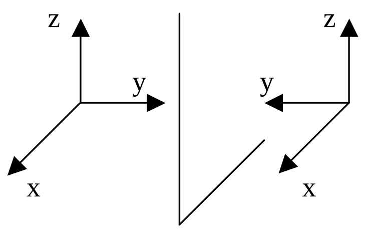
$$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y} \quad \text{etc…}$$



Pour une opération de **translation** ou de **rotation**, le sens du trièdre n'est pas affecté. On parle d'**opérations de symétries positives**.
La conséquence en est que si l'on a invariance de la distribution D par translation ou par rotation, le champ $\vec{B}$ (M') existant au point M', image du point M par cette opération de symétrie, est relié au champ $\vec{B}$ (M) régnant en M par la même opération de symétrie S :

$$\boxed{\text{Pour } M' = S(M),\ \vec{B}(M') = S[\vec{B}(M)]}$$

Au contraire, pour une **symétrie plane** S_p, l'opération de symétrie amène une inversion de l'espace, on parle d'**opération de symétrie négative**.



La conséquence en est que si l'on a invariance de la distribution D par la symétrie plane S_p, le champ $\vec{B}$ (M') existant au point M', image du point M par cette opération de symétrie, est égal à l'*opposé* du symétrique du champ $\vec{B}$ (M') :

$$\boxed{\text{Pour } M' = S_p(M),\ \vec{B}(M') = -\,S_p[\vec{B}(M)]}$$

Remarque : une antisymétrie plane est une opération de symétrie qui consiste à opérer une symétrie de la distribution de courant envisagée par rapport à un plan, puis à renverser le sens des courants. C'est au bilan une opération de symétrie positive.

V-2 Recherche de la direction d'un champ magnétostatique :

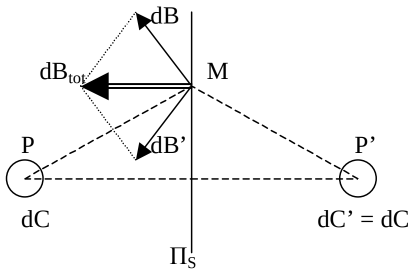
On accèdera à cette information par des considérations de symétrie en des points appartenant à un élément de symétrie de la distribution qui crée $\vec{B}$.
Les propriétés énoncées ci-après permettront de déterminer la direction du champ en un point M, pourvu que ce point M appartienne à un des éléments de symétrie envisagés.

(a) Cas d'un plan de symétrie :

En un point M appartenant à un plan de symétrie Π_S de la distribution D de courant produisant $\vec{B}$, le champ magnétostatique $\vec{B}$ (M) sera orthogonal au plan Π_S.

Cette propriété peut s'établir à partir de la loi de Biot et Savart, associée au principe de superposition.

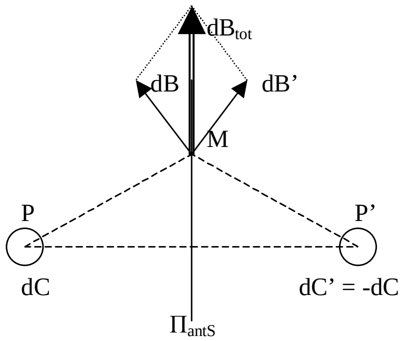
Une distribution D admettant un plan de symétrie Π_S peut être décomposée en éléments de courants deux à deux symétriques par rapport à Π_S.
La loi de Savart amène à ce que la somme vectorielle des champs créés par les deux éléments de courant symétrique soit orthogonale à Π_S.
Le principe de superposition conduit à ce que le champ magnétique créé par la disribution résulte de la sommation de tous ces champ élémentaires ; $\vec{B}$ (M) est donc orthogonal au plan de symétrie Π_S.



(a) Cas d'un plan d'antisymétrie :

En un point M appartenant à un plan d'antisymétrie Π_{antS} de la distribution D de courant produisant $\vec{B}$, le champ magnétostatique $\vec{B}$ (M) sera compris dans le plan Π_{antS}.

Cette propriété peut s'établir de même.
Une distribution D admettant un plan d' antisymétrie Π_{antS} peut être décomposée en éléments de courants deux à deux antisymétriques par rapport à Π_{antS} : dC' = -dC.
La loi de Savart amène à ce que la somme vectorielle des champs créés par les deux éléments de courant symétrique soit comprise dans Π_{antS}.
Le principe de superposition conduit à ce que le champ magnétique créé par la disribution résulte de la sommation de tous ces champ élémentaires ; $\vec{B}$ (M) est donc compris dans le plan d'antisymétrie Π_{antS}.



Remarque : On constate un comportement exactement inverse de $\vec{B}$, vecteur axial, par rapport au cas du champ électrostatique $\vec{E}$, vecteur polaire.

(c) Intersection de plans d'antisymétrie ou de symétrie:

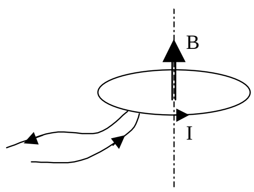
En des points situés à l'intersection de différents plans d'antisymétrie , le champ $\vec{B}$ devant être coplanaire à chacun d'eux, il sera colinéaire à l'axe constituant l'intersection.

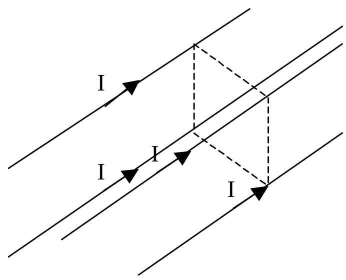
A l'intersection de plans de symétrie, $\vec{B}$ devant être orthogonal à chacun de ces plans, il s'annulera.

exemples :

1) Spire circulaire

2) 4 fils parcourus par un même courant, disposés parallèlement, aux sommets d'un carré.





V-3 Considérations d'invariances :

(a) Par rotation : s'il existe un axe autour duquel une rotation d'angle θ quelconque laisse invariante la distribution de courant D, alors la valeur du module B du champ magnétique en un point M ne dépendra de la coordonnée θ correspondante.

(b) Par translation : s'il existe une direction selon laquelle toute translation laisse invariante la distribution de courant D, alors la valeur du module B du champ magnétique en un point M ne dépendra de la coordonnée θ correspondante.

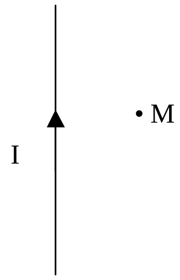
Application : champ magnétostatique créé par un « fil infini » (en pratique, par la portion rectiligne et de grande dimension d'un circuit électrique fermé).
L'étude se fera de façon évidente dans le système de coordonnées cylindriques.

A priori, l'expression du champ est de forme : $\vec{B} = B_r(r,\theta,z)\vec{e_r} + B_\theta(r,\theta,z)\vec{e_\theta} + B_z(r,\theta,z)\vec{e_z}$

Invariances :

donc l'expression du champ se réduit à :

Symétries :

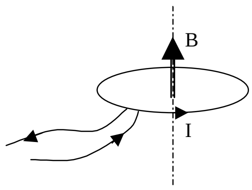


l'expression finale du champ est donc :

V-4 Etude de quelques cartes de champ :

1°) Champ magnétostatique créé par une spire circulaire parcourue par un courant :

Géométrie de la distribution :



- Toute rotation autour de l'axe (Oz) de la spire la laisse inchangée.
- Une symétrie par rapport au plan de la spire laisse la distribution invariante
- Par contre, toute symétrie par rapport à un plan passant par (Oz) transforme la spire en une spire parcourue par un courant I en sens opposé .

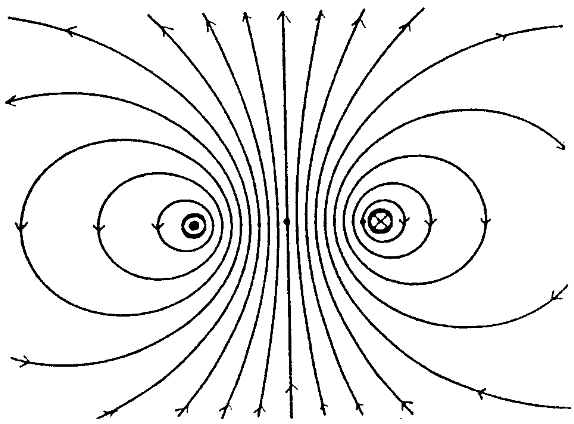
Le plan de la spire est plan de symétrie, tandis que les plans contenant (Oz) sont des plans d'antisymétrie de la distribution.

Le champ en un point M(r, θ, z) quelconque a donc pour expression :

Le plan Π de la spire étant plan de symétrie, pour M' = S_Π(M), donc pour une cote z' = -z :

B_r (r, -z) = et B_z(r, -z) =

Observations : Le champ étant invariant par rotation autour de Oz, on limite la carte à un plan, que l'on complètera par révolution autour de (Oz).



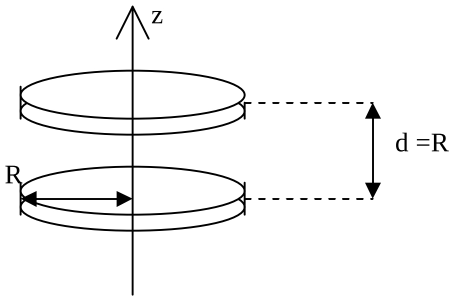
a) Contrairement aux lignes de champ électrostatique E, les lignes du champ magnétostatique B sont **fermées**.

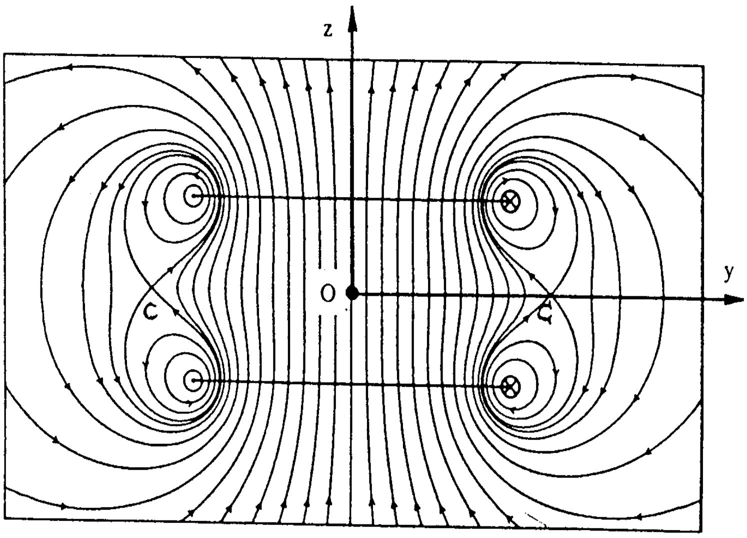
b) Elles ne divergent pas à partir des sources de champ : les lignes de champ **tourbillonnent** autour des sources.

c) Le sens du tourbillon n'est pas anodin : un tire bouchon dont la pointe progresse dans le sens de l'intensité le long d'un élément de fil a son manche qui tourne dans le sens des lignes de champ entourant cet élément.

2°) Champ créé par des bobines de Helmhotz :

Le système des bobines de Helmholtz est constitué de deux enroulements identiques, disposés selon des plans parallèles distants d'un longueur égale au rayon des bobines et parcourus par un même courant (même sens, même intensité).





On peut faire des observations analogues au cas précédent pour la carte de champ.

L'intérêt de ce système particulier réside dans la **création d'un champ pratiquement uniforme** entre les bobines, ce qui se traduit par des lignes de champ parallèles dans cette région et par une variation très faible du module du champ. (voir TP)

Remarque : on peut noter une singularité aux points C où une ligne de champ se recoupe en forme de 8. Ces points présentent un champ nul. Les lignes de champ singulières passant par les points C marquent la frontière entre les lignes de champ entourant une seule bobine (comportement local) et celles entourant les deux bobines (comportement global).

Zoom arrière sur les bobines de Helmholtz :

En s'éloignant de la distribution, la carte de champ prend l'allure de celle correspondant à une spire circulaire. Cette carte ressemble d'ailleurs à la carte du champ électrostatique E produit par un dipôle électrostatique.
C'est un résultat général : le champ B d'une distribution de courants de moment magnétique non nul a, à grande distance, la même structure, dite champ d'un dipôle magnétique.
Nous retrouverons plus complètement cette notion de dipôle magnétique dans un chapitre ultérieur.

Un contre exemple, c'est à dire une distribution présentant un **moment magnétique nul** : il suffit d'alimenter les deux bobines précédentes par des courants de sens opposés. (bobines de Helmoltz ’’ à l'envers ’’). La carte de champ en est représentée ci-dessous.(voir TP)