A CINEMATIQUE

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment de leurs cause : elle vise donc à DECRIRE les mouvements (trajectoire, vitesse, accélération) et non à les EXPLIQUER.
La cinématique (du grec « kiné » vitesse, mouvement) se distingue donc de la dynamique (du grec « dyn » : force) qui a pour but d'établir une relation entre les causes (actions mécaniques) et leurs effets (mouvements).

1 Généralités :

Nous étudierons cette année la mécanique du **point matériel,** et des **systèmes de deux points matériels.**

Un point matériel est par définition sans dimension, il occupe une position M dans l'espace, en général variable dans le temps, définie par le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$ **.** Ce point est affecté d'une masse m.
Un point matériel n'a aucune existence physique, mais dans certains problèmes, la modélisation d'un objet réel (skieur descendant une pente, satellite évoluant autour de la Terre, anneau enfilé sur une barre...) sous forme d'un point affecté de la masse totale de l'objet sera une représentation suffisante pour interpréter son mouvement par les équations de la mécanique.

La courbe décrite par le point durant son mouvement est la **trajectoire** du mobile : elle correspond à une évolution de la position M dans l'espace du mobile en fonction du temps t.

L'**espace physique** apparaît, avec une excellente approximation, comme un **espace euclidien à trois dimensions**. On y observe la conservation de la norme d'un vecteur ($(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ = cste) pour toute transformation par translation ou rotation de l'espace (isométrie). Cette approximation est parfaitement vérifiée dans la mécanique classique, mais elle est remise en cause dans le cadre de la mécanique relativiste. L'écart entre l'espace réel et l'espace euclidien est infime à la surface de la Terre, et n'apparaît de façon notable qu'à proximité d'objets très massiques (astres, trous noirs...), ou à des vitesses très élevées (supérieures au dixième de $c = 3.10^8$ m/s).

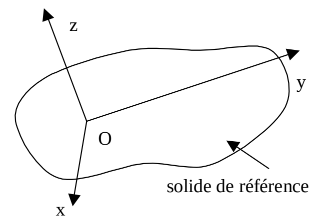
La mesure des longueurs s'effectue à partir du mètre : c'est par définition légale la distance parcourue par la lumière dans le vide en (1/299792458) seconde.

Le **temps** est une notion intuitive (et souvent subjective) difficile à définir clairement. La mesure du temps s'appuie sur des phénomènes cycliques, ce qui suppose l'uniformité du temps et la conservation des lois physiques par translation dans le temps : un système générant un comportement cyclique, se retrouve à son état initial après chaque cycle (rotation de la terre sur son axe, horloge comtoise, montre à quartz, horloge atomique...). On suppose qu'il va effectuer les cycles successifs en une même durée : on suppose donc l'invariance des lois physiques par translation dans le temps.

L'unité de temps est la seconde : « durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyper fins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133 ». C'est la définition employée dans les horloges atomiques, où l'on mesure la fréquence d'émission du Césium 133.

La description du mouvement va dépendre du **référentiel** d'observation. On nomme référentiel un système de coordonnée lié à un observateur, cet observateur est muni d'une chronologie, c'est à dire d'un moyen de mesurer le temps.

Le mouvement n'est donc pas absolu : deux observateurs différents, placés dans deux référentiels en mouvement relatif, décriront de façon différente le mouvement d'un même objet, (mouvement d'une balle dans un train en mouvement, observée du wagon (mouvement vertical) ou du quai de gare (mouvement parabolique)) : la trajectoire, la vitesse et l'accélération d'un mobile dépendent du référentiel de description du mouvement.



Un référentiel est défini par la donnée d'un point considéré comme fixe (position de l'observateur) usuellement noté O, et de trois directions de l'espace, considérées comme fixes, le tout étant muni d'une chronologie (mesure du temps).

On dit aussi qu'un référentiel est défini par un solide de référence : tout objet physique indéformable permet en effet de fixer, de par sa disposition dans l'espace, une position O et des axes d'orientation (Ox), (Oy) (Oz) fixes. (Ces axes sont usuellement choisis orthogonaux entre eux, par commodité).

Par exemple, le référentiel de la salle de classe est déterminé par les directions définies par un coin de la pièce et la donnée d'un point fixe de la salle.

Dans toute la mécanique classique, on suppose que le temps est une notion absolue, indépendante du référentiel : deux observateurs, liés à des référentiels différents, observeront un phénomène au même instant, et mesureront les mêmes durées. La relativité restreinte rejette cette hypothèse. (dilatation des durées dans le référentiel de l'observateur par rapport au référentiel propre, c'est à dire au référentiel lié au système considéré)

De même, la mesure d'une longueur est indépendant du référentiel dans le cadre de la mécanique classique, alors que ce n'est pas le cas en mécanique relativiste. (contraction des longueurs dans le référentiel de l'observateur par rapport au référentiel propre).

L'ensemble du cours se restreindra au cas de la **mécanique classique**.

2 (R)appels de géométrie :

2.1 Systèmes de coordonnées :

Par définition, une **ligne de coordonnée** est la courbe engendrée par la variation d'une des coordonnées, les autres étant fixées.
Les vecteurs unitaires des bases considérées seront des vecteurs unitaires, donc de module 1, tangents à la ligne de coordonnée, et orientés dans le sens croissant de la coordonnée.

Présentons les trois systèmes de coordonnées que nous serons amenés à utiliser, munies de leurs bases orthonormées :

(a) coordonnées cartésiennes : x : abscisse ; y : ordonnée ; z. : cote

Les lignes de coordonnées sont des droites parallèles aux axes de coordonnées.

pour décrire tout l'espace, x, y et z doivent varier de -∞ à +∞

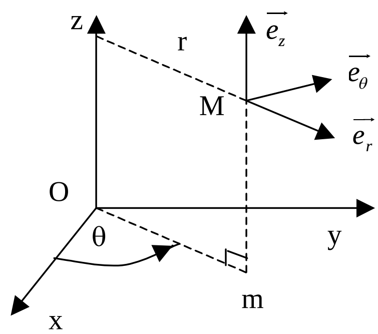
La base cartésienne $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est invariante : $\frac{d\vec{i}}{dt}=\frac{d\vec{j}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}=0$

vecteur position : $\overrightarrow{OM}=x\ \vec{i}+y\ \vec{j}+z\ \vec{k}$

déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM}=dx\ \vec{i}+dy\ \vec{j}+dz\ \vec{k}$

Remarquons que $d\overrightarrow{OM}$ est indépendant du point O choisi, pourvu qu'il soit fixe. Chaque terme de $d\overrightarrow{OM}=d\overrightarrow{M}$ correspond à un déplacement élémentaire sur la ligne de coordonnée concernée

(b) coordonnées cylindriques :



r : rayon cylindrique, θ angle polaire . z : cote.

La ligne de coordonnée sur r est la demi-droite radiale passant par M, celle sur θ est un cercle de rayon r situé dans un plan orthogonal à (Oz), celle sur z est la droite parallèle à (Oz) passant par M.

pour décrire tout l'espace,
r doit varier de 0 à +∞ ; θ de 0 à 2π ; z de -∞ à +∞.

vecteur position : $\overrightarrow{OM}=r\ \overrightarrow{e_r}+z\ \overrightarrow{e_z}$

Remarquons que l'unitaire orthoradial n'intervient pas dans cette expression.

Dans la base cylindrique, l'unitaire radial $\overrightarrow{e_r}$ et l'unitaire orthoradial $\overrightarrow{e_\theta}$ varient avec la position de M (ils dépendent de θ). L'unitaire axial $\overrightarrow{e_z}$ est invariant.

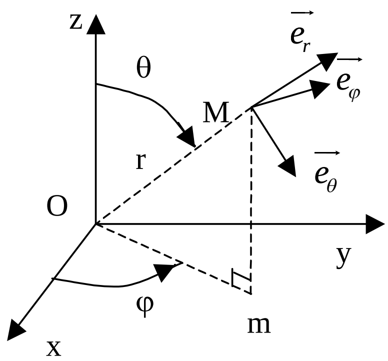
déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = dr\ \overrightarrow{e_r} + r.d\theta\ \overrightarrow{e_\theta} + dz\ \overrightarrow{e_z}$

(c) coordonnées sphériques :

r : rayon sphérique ; θ : colatitude (λ = π/2 - θ : latitude) ; φ : azimut ou longitude.

La ligne de coordonnée sur r est la demi-droite radiale sphérique [OM), celle sur θ est le cercle de centre O et de rayon r situé dans le plan (O,M, m) (m est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy)), celle sur φ est le cercle d'axe (Oz) passant par M, de rayon ρ = r.sinθ.

pour décrire tout l'espace,
r doit varier de 0 à +∞ ; θ de 0 à π ; φ de 0 à 2π.



vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r}$

Remarquons que l'unitaire orthoradial et l'unitaire azimutal n'interviennent pas dans cette expression.

Dans la base sphérique, l'unitaire radial $\overrightarrow{e_r}$ et l'unitaire orthoradial $\overrightarrow{e_\theta}$ varient avec la position de M (ils dépendent de θ et φ). L'unitaire azimutal $\overrightarrow{e_\varphi}$ varie avec M, car il dépend de φ.

déplacement élémentaire :

$$d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = dr\ \overrightarrow{e_r} + r.d\theta\ \overrightarrow{e_\theta} + r.\sin\theta.d\varphi\ \overrightarrow{e_\varphi}$$

Le système sphérique, vu aussi en mathématiques, est donné ici à titre d'information. Nous ne l'utiliserons pas dans cette première partie du cours de mécanique.

Attention : les quantités notées r et $\overrightarrow{e_r}$ n'ont pas même signification en coordonnées radiales et en coordonnées sphériques.

2.2 Trajectoire, bases locales.

2.2.1 Courbes paramétrée, équations de trajectoire :

L'évolution de la position d'un mobile M en fonction du temps va s'exprimer assez naturellement par la donnée des coordonnées de ce point en fonction du temps.
La courbe paramétrée par le temps t : (x(t), y(t), z(t)) constitue la trajectoire, dans le référentiel considéré. Elle peut bien sûr s'exprimer dans d'autres systèmes de coordonnées :
(r(t), θ(t), z(t)) en coordonnées cylindriques ou (r(t), θ(t), φ(t)) en coordonnées sphériques.

Il est possible de relier les trois coordonnées par deux équations, par exemple : f(x, y, z) = 0 et g(x, y ,z) = 0
Ceci constitue **l'équation cartésienne** de la trajectoire.

On rencontrera dans le cours le cas de mouvements plans repérés par les coordonnées (r, θ), dans le plan z = 0 (**plan polaire**) ; l'équation f(r, θ) = 0 constituera alors l'**équation polaire** de la trajectoire.

Un choix judicieux des coordonnées permet de simplifier notablement les problèmes. L'étude d'une trajectoire plane pourra se faire en partant par exemple d'une expression du mouvement en coordonnées sphériques, paramétrée par le temps : r(t), θ(t) , φ(t) constituant l'équation paramétrée de la trajectoire.

Si le mouvement s'avère se dérouler dans un plan, on choisit les coordonnées r, θ, φ de façon à ce que le plan du mouvement soit le plan défini par φ = cste en coordonnées sphériques. On se ramène alors dans le

plan polaire $\left(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta}\right)$ et l'on peut établir **l'équation polaire** de la trajectoire r(θ) à partir de son équation paramétrée (r(t), θ(t)).

2.2.2 Caractère local des bases en coordonnées cylindriques ou sphériques :

Les bases cylindriques et sphériques présentent un caractère local en ce sens qu'elle dépendent de la position M considérée, au contraire de la base cartésienne qui est invariante avec la position M.

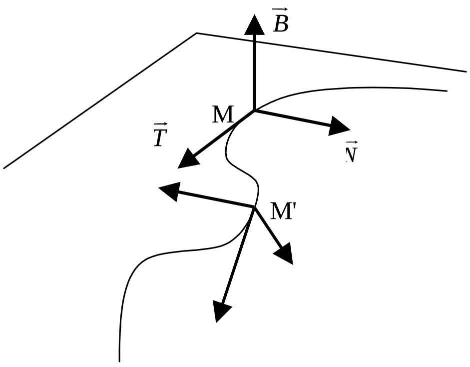
Cette propriété aura des conséquences importantes lorsque nous calculerons les vitesses et accélérations du mobile M, puisqu'alors les vecteurs de base étant variables dans le temps, leur variation devra être prise en compte dans les calculs de dérivation temporelle nécessaires à l'expression des vitesse :

$$\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$$

et accélération $$\vec{\gamma}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$$

2.2.3 Trièdre de Frénet :

Cette base locale a peut être été utilisée en terminale. Elle n'est pas au programme de Sup PCSI, mai évoquée ici à titre d'information.



La base de Frenet est définie par trois vecteurs, constituant une base orthonormée.
Pour un mobile de position M à l'instant t, se déplaçant le long d'une courbe-trajectoire (C).

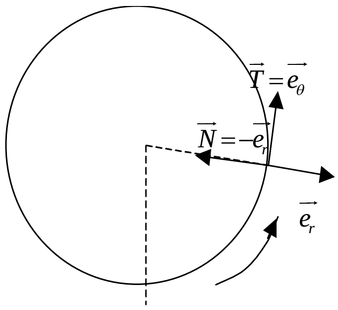
- $\vec{T}$ est le vecteur unitaire porté par la tangente à (C) au point M, orienté dans le sens du mouvement de M.

- le vecteur normal $\overrightarrow{N}$ contenu dans le plan du mouvement, normal à $\vec{T}$ et dirigé vers la concavité de la courbe (C).
(toute trajectoire , même non plane, peut localement être considérée comme plane, ce qui permet d'étendre la définition de $\overrightarrow{N}$ à une trajectoire quelconque).

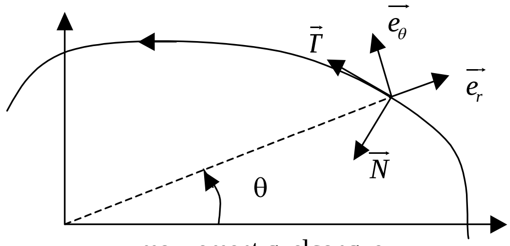
- le vecteur binormal $\vec{B}$. défini par : $\vec{B}=\vec{T}\wedge\vec{N}$.

Le trièdre $\left(\vec{T},\vec{N},\vec{B}\right)$ constitue le **trièdre de Frénet.** C'est une <u>base locale</u> qui évolue avec la position du mobile M.

exemples :



mouvement circulaire



mouvement quelconque

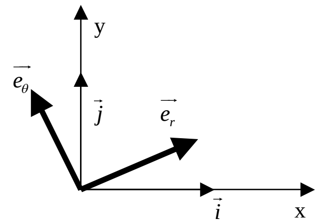
2.3 Dérivation d'un vecteur par rapport à un paramètre angulaire.

La base polaire $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$ n'est pas fixe. La direction de ses vecteurs évolue avec l'angle polaire θ.

Projetons la base polaire sur la base cartésienne :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta \ \vec{i} + \sin\theta \ \vec{j}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} =$$



la base cartésienne $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ étant invariante par rapport à θ, il vient par dérivation angulaire :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} = \qquad \text{et} \qquad \frac{d\overrightarrow{e_r}}{d\theta} =$$

Une dérivation d'un vecteur par rapport à un paramètre angulaire revient à lui faire effectuer une rotation d'un angle de $\pi/2$ autour de l'axe correspondant. Ceci fournit un moyen mnémotechnique pour retenir les deux formules :

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta} \qquad \boxed{\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r}$$

Pour une dérivation temporelle, en utilisant la dérivation composée : $\dfrac{d}{dt} = \left(\dfrac{d}{d\theta}\right).\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)$

On obtient, en posant $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$: $\quad \dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \omega.\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\omega.\vec{e}_r$

Une démarche analogue permet de dériver la base sphérique $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$ en la projetant sur la base cartésienne $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, mais elle est compliquée par le fait que la dépendance de cette base concerne deux grandeurs angulaires , θ et φ. Nous n'aborderons cette difficulté qu'ultérieurement.

A titre d'exercice, on pourra par exemple projeter la base sphérique sur la base cartésienne, puis établir les relations :

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta \qquad \text{et :} \qquad \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \sin\theta.\vec{e}_\varphi$$

3. Mouvement d'un point matériel :

Rappelons qu'un point matériel, point sans dimension affecté d'une masse m, est un modèle simple, représentatif d'un système mécanique.
Le mouvement du système est défini en référence à un observateur, c'est à dire dans un certain référentiel.
Le référentiel est défini par la donnée d'un système d'axe affirmés comme fixes par l'observateur, et d'une chronologie.

Toutes les caractéristiques du mouvement dépendent du référentiel d'observation : trajectoire, vitesse, accélération…Nous développerons à ce sujet, dans la seconde partie de l'année, un chapitre spécifique sur le changement de référentiel.

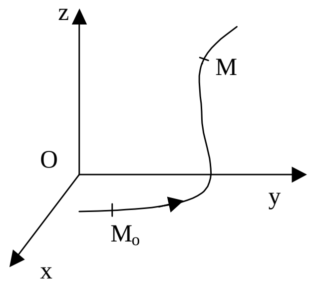
Retenons que la définition d'un mouvement passe nécessairement par le choix explicite du référentiel de définition de ce mouvement (« mouvement par rapport à … »).

Par ailleurs, l'expression des caractéristiques du mouvement (position, vitesse, accélération du mobile) se fera par des quantités vectorielles, que l'on pourra exprimer dans la base de notre choix.

3.1 Trajectoire :

Soit M, point matériel en mouvement par rapport au référentiel R_o défini par le système d'axes (Oxyz). La courbe (C) décrite par M dans R_o est sa trajectoire.
On oriente cette trajectoire en définissant un sens positif sur cette courbe. Usuellement, on choisira le sens de déplacement effectif de M.

En choisissant un point fixe M_o sur la trajectoire, origine du mouvement, on définit une abscisse curviligne s de M sur (C) : s est une mesure algébrique de l'arc M_oM.
La loi s(t) donnant s en fonction du temps t est l'équation horaire du mouvement de M.
A tout instant, la position de M dans l'espace est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ reliant l'origine O du référentiel R_o à M. $\overrightarrow{OM}(t)$ pourra s'exprimer dans toute base vectorielle de l'espace.



Les bases usuelles sont :

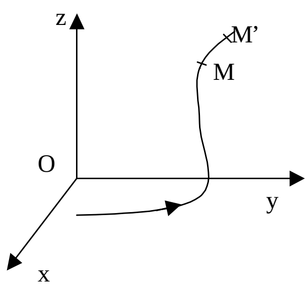
-la base cartésienne dans laquelle : $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$

-la base cylindrique dans laquelle : $\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r} + z\ \overrightarrow{e_z}$

-la base sphérique dans laquelle : $\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{e_r}$

3.2 Vitesse :

Envisageons la position M, occupée par le mobile à l'instant t, et la position M', occupée par le mobile à l'instant t' = t + Δt.



Par définition, la vitesse du mobile à l'instant t, dans le référentiel R_o est :
$\vec{v}(M/R_o) = \lim\limits_{\Delta t \to O} \frac{\overrightarrow{MM}}{\Delta t}$
Si l'on considère un **point fixe** dans le référentiel, (par exemple l'origine O, mais ce n'est pas nécessaire), le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ peut se décomposer selon : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Delta M}$.

Le vecteur vitesse apparaît donc comme la limite pour Δt tendant vers 0 du rapport de la variation du vecteur position à la durée Δt : c'est donc la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

Si Δt tend vers 0, M' devient infiniment proche de M. La quantité infinitésimale « Δt tendant vers 0 » sera notée dt et le terme correspondant $\overrightarrow{\Delta M}$ sera noté $\overrightarrow{dM}$. $\vec{v}(M/R_o) = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$.
Une conséquence directe de la définition du vecteur vitesse est qu'il sera systématiquement **tangent à la courbe-trajectoire** au point M considéré.

3.3 Accélération :

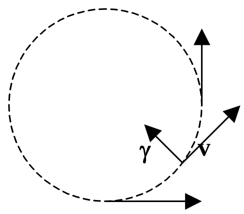
Par définition, l'accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse du mobile, dans le référentiel d'étude : $\vec{\gamma}(M/R_o) = \frac{d\overrightarrow{v(M/R_{o)}}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}$.

Ce vecteur dépend bien sûr du référentiel de définition du mouvement.

Il représente la **variation <u>vectorielle</u> instantanée** du vecteur vitesse.

Une mise en garde importante : dans le vocabulaire usuel, on nomme accélération une quantité correspondant à l'augmentation du module de la vitesse (on nomme d'ailleurs vitesse ce module) : la voiture accélère pour doubler un camion.
En mécanique, l'accélération est une quantité vectorielle, traduisant la variation du vecteur-vitesse.

Un mouvement non accéléré, c'est à dire à vitesse constante (précisément avec un module de vitesse ne variant pas dans le temps) peut néanmoins être doté d'une accélération (au sens physique du terme).



C'est par exemple le cas pour le mouvement circulaire uniforme : un mobile ayant ce type de mouvement se déplace le long d'un cercle, avec une vitesse de moule v constant.
Néanmoins, la trajectoire circulaire n'est obtenue que grâce à un infléchissement régulier du vecteur-vitesse : la trajectoire s'incurve du fait de l'accélération centripète du mobile.

3.4 Mouvement accéléré, décéléré ou uniforme :

Comme nous venons de le souligner dans la remarque précédente, un risque de confusion existe entre l'accélération au sens mécanique du terme, qui est une variation temporelle du vecteur vitesse, et le sens commun d'augmentation du module de la vitesse.

Le physicien se préoccupe lui aussi des variations du module de la vitesse du mobile, notamment parce qu'elles sont liées à des variations de l'énergie cinétique du système : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Une variation du module v de la vitesse est équivalente à celle du carré scalaire du vecteur vitesse ;
Or : $\frac{d\vec{v}^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}.\vec{v}) = 2\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt}$ soit $\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v}.\vec{\gamma}$
Conclusion : le sens de variation du module v de la vitesse d'un mobile est lié au signe du produit scalaire de son vecteur vitesse par son vecteur accélération.

Si $\vec{v}.\vec{\gamma} > 0$: $\frac{dv}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} > 0$ le mouvement est dit **accéléré** ;

si $\vec{v}.\vec{\gamma} < 0$: $\frac{dv}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} < 0$ le mouvement est dit **décéléré** ;

si $\vec{v}.\vec{\gamma} = 0$: $\frac{dv}{dt} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$ le mouvement est dit **uniforme**.

On vérifiera ainsi que le mouvement circulaire uniforme évoqué plus haut met en jeu nécessairement une accélération centripète, orthogonale à tout instant au vecteur vitesse.