Oscillations mécaniques libres

Il est fortement recommandé de reprendre les informations présentées ci-dessous sous forme d'un tableau-résumé, afin de s'approprier pleinement ces notions.

<u>Oscillateur mécanique linéaire amorti : étude des différents régimes.</u>

L'étude préliminaire du système mécanique a conduit à la mise sous forme canonique de l'équation du mouvement de l'oscillateur selon : $\ddot{x} + \frac{\omega_o}{Q}\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$ en régime libre, où x(t) est la position instantanée du mobile, ω_o la pulsation propre de l'oscillateur et Q le facteur de qualité.

III Etude des différents régimes :

<u>III-0 Equation caractéristique :</u>

Elle s'obtient en posant à priori des solutions de forme : x(t) = A.exp(r.t)
où r peut être un nombre réel ou complexe.

l'E.C. s'écrit donc : $r^2 + \frac{\omega_o}{Q} r + \omega_o^2 = 0$

équation du deuxième degré sur r, de discriminant $\Delta = (\omega_o / Q)^2 - 4\,\omega_o^2 = 4\omega_o^2\,((1/4Q^2) - 1)$.

3 cas sont possibles selon que Δ est positif, nul ou négatif.

Nous allons établir maintenant l'expression de l'équation horaire du mouvement x(t) dans les différents cas, en prenant un même jeu de conditions initiales (CI) à titre d'exemple.

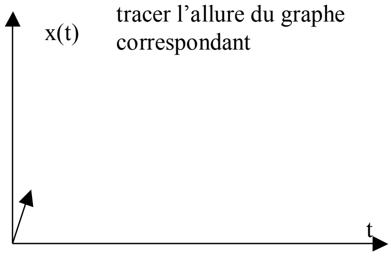
$$CI = \{\ x(t=0) = 0\ ;\ \dot{x}(t=0) = v_o\ \}.$$

La nature des solutions de l'E.C. détermine la forme des solutions x(t).
<u>III-1 Fort amortissement : $\Delta > 0$, le régime **apériodique**.</u>
cas où Q < 1/2

alors : $r = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm \omega_o \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

l'EC admet deux solutions réelles et négatives.

tracer l'allure du graphe correspondant



En notant r_1 et r_2 les deux solutions réelles de l'E.C. , (r_1 et r_2 sont négatives) :

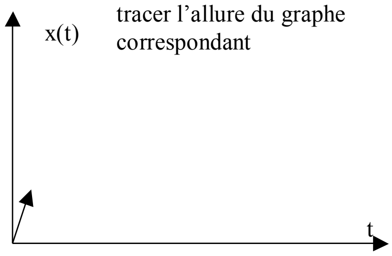
$$x(t) = A.\exp(r_1.t) + B.\exp(r_2.t)$$

Les CI déterminent A et B : $x(0) = A + B = 0$ et $\dot{x}(0) = r_1.A + r_2.B = v_o$

On tire : $B = -A = -v_o / (r_1 - r_2)$

<u>III-2 Un cas limite : $\Delta = 0$, le régime **critique**.</u>
cas faisant limite entre le précédent et le suivant, obtenu pour Q = 1/2.

tracer l'allure du graphe correspondant



l'E.C. admet alors une solution double $r = -\omega_o$, réelle et négative.

La solution x(t) est alors de forme : $x(t) = (A.t + B)\exp(-\omega_o.t)$

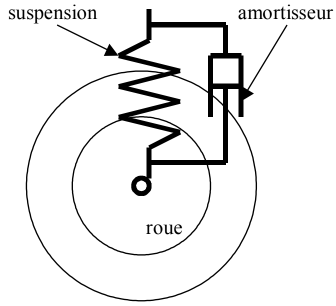
Les CI déterminent A et B : x(0) = B = 0 et
$\dot{x}(t) = A.\exp(-\omega_o.t) - \omega_o A.t.\exp(-\omega_o.t)$ donc $\dot{x}(0) = A = v_o$.

Il vient : $x(t) = v_o.t.\exp(-\omega_o.t)$

On montre que le régime critique correspond au régime de retour le plus rapide à la position d 'équilibre (ici $x_{éq} = 0$).

Application : l'ensemble suspension et amortisseur sur une automobile peut être modélisé comme un oscillateur mécanique linéaire amorti.

Comme son nom l'indique, l'amortisseur produit l'amortissement du dispositif, tandis que la suspension assure le rappel à la position d'équilibre.



Quand il est correctement réglé, le système doit être en régime critique. Un amortisseur usé amène à un régime pseudo-périodique : les cahots de la route amènent des oscillations du véhicule, très préjudiciables à sa tenue de route.

III-3 Amortissement faible : $\Delta < 0$, le régime **pseudo-périodique** :

Dans le cas Q > 1/2

alors : $r = -\dfrac{\omega_o}{2Q} \pm i\omega_o\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ en remarquant que $1-\dfrac{1}{4Q^2} > 0$

l'EC admet deux solutions complexes et conjuguées, à parties réelles négatives.

On notera usuellement $\omega = \omega_o\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$ et ainsi $r = -\dfrac{\omega_o}{2Q} \pm i\omega$

La partie réelle détermine l'exposant de l'exponentielle traduisant l'amortissement des oscillations tandis que la partie imaginaire donne accès à la pseudo-pulsation ω.

La solution x(t) peut s'écrire "mathématiquement" : $x(t) = \exp\left(-\dfrac{\omega_o t}{2Q}\right)\left(\lambda\exp(i\omega t) + \mu\exp(-i\omega t)\right)$

où (λ, μ) sont des complexes ;

mais on sait que x(t) doit être une fonction réelle.

L'expression de x(t) peut alors se faire selon l'une ou l'autre des formes :

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_o t}{2Q}\right)\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_o\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

ou $$x(t) = X_o\exp\left(-\frac{\omega_o t}{2Q}\right)\cos(\omega t + \varphi)$$

solution pseudo-périodiques de pseudo période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_o\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}} \approx \dfrac{2\pi}{\omega_o}$ pour Q suffisant.

On définit le décrément logarithmique : $\boxed{\delta = \dfrac{1}{n}\dfrac{\ln x(t)}{\ln x(t+nT)}}$

dont la valeur est déterminée par l'amortissement de l'oscillateur.Le calcul théorique amène : $\delta = \pi/Q$.

δ est accessible expérimentalement en mesurant des valeurs de x séparées de n pseudo-périodes

Pour les CI considérées :

$x(0) = 0$ amène $X_o\cos\varphi = 0$ donc $\cos\varphi = 0$ soit $\varphi = \pm\pi/2$

(la solution triviale $X_o = 0$ est sans intérêt).

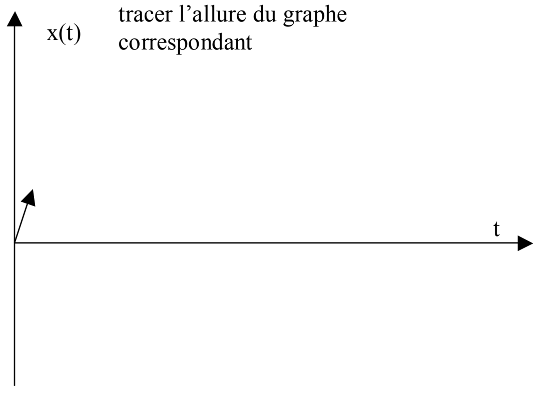
x(t) s'écrit donc : $x(t) = X_o\exp\left(-\dfrac{\omega_o t}{2Q}\right)\sin(\omega t)$

il vient alors : $\dot{x}(t) = \dfrac{-\omega_o}{2Q}X_o\exp\left(-\dfrac{\omega_o t}{2Q}\right)\sin(\omega t) + X_o\omega\exp\left(-\dfrac{\omega_o t}{2Q}\right)\cos(\omega t)$

$\dot{x}(0) = v_o$ amène donc : $X_o.\omega = v_o$

finalement : $x(t) = \dfrac{v_o}{\omega}\exp\left(-\dfrac{\omega_o t}{2Q}\right)\sin(\omega t)$

tracer l'allure du graphe correspondant



La durée caractéristique de retour à l'équilibre apparaît dans le facteur exponentiel : $\tau = 2Q / \omega_o$