PORTRAIT DE PHASE

Soit M(m) point matériel dont le mouvement est à un seul dégré de liberté. Sa position est alors définie par une seule variable x(t). Sa vitesse est donc directement reliée à $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

Les deux informations x et $\dot{x}$ suffisent à déterminer totalement son état mécanique à un instant t donné.

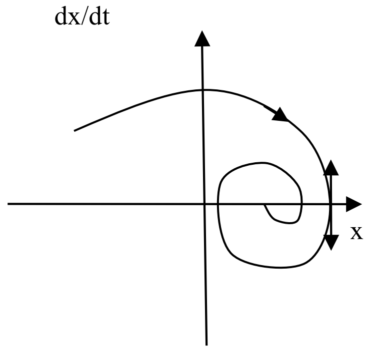
Par définition, le graphe $\boxed{\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)}$ est la **trajectoire de phase** du système dans le plan de phase $(x, \dot{x})$
.

L'ensemble des trajectoires de phase (pour différentes conditions initiales du mouvement) constitue le **portrait de phase**.

Propriétés générales :

• Le temps n'apparaît pas explicitement, mais il est noté sous la forme d'une flèche orientant les trajectoires de phase.

• des trajectoires de phase fermées traduisent un mouvement périodique : le système parcourt périodiquement une même succession d'états $(x, \dot{x})$



• Deux trajectoires de phase d'un système libre ne peuvent pas se couper : il y a unicité de solution de l'équation du mouvement pour des conditions initiales données.

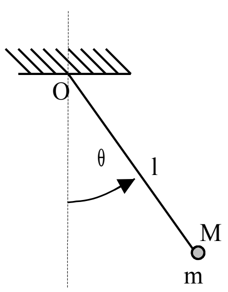
• une position d'équilibre stable se manifeste par des trajectoires de phase entourant cette position .
En cas d'amortissement, la vitesse tendra à s'annuler et l'on aura un point d'accumulation en ($x = x_{éq}$, 0). (centre attracteur).

• x augmente avec le temps pour $\dot{x} > 0$ et diminue pour $\dot{x} < 0$: dans le cas précédent, toutes les trajectoires de phase seront parcoururs dans le sens anti-trigonométrique.

• Dans le plan de phase $(x, \dot{x})$, la pente des trajectoires de phase est : $\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

donc pour $\dot{x} \to 0$ la pente → ∞ : les trajectoires ont une tangente verticale au niveau de l'axe des abscisses ; sauf si cela concerne une position d'équilibre, pour laquelle $\ddot{x} = 0$ car alors $\ddot{x}/\dot{x}$ est une forme indéterminée.

Exemple d'oscillateur non linéaire : le pendule simple :



On envisage la situation classique d'une petite bille de masse m, suspendue par une barre de longueur L fixée en un point O, inextensible et de masse négligeable. La position M de la bille est repérée par l'angle θ indiqué sur la figure ci-contre. θ est la seule variable de position.

L'écriture de l'intégrale première de l'énergie donne :

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

La dérivation de cette équation par rapport au temps mène à l'équation du mouvement $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$ équation différentielle NON LINEAIRE.

Le pendule simple est donc un **oscillateur non linéaire**.

Son portrait de phase, c'est à dire la représentation $\dot{\theta} = f(\theta)$ est obtenue à partir de l'intégrale première de l'énergie, que l'on peut écrire sous la forme : $e = \dot{\theta}^2 + 2\omega_o{}^2(1 - \cos\theta)$ avec $\omega_O{}^2 = g/l$ et $e = 2E/ml^2$

On tire alors : $\dot{\theta} = \pm\sqrt{e - 2\omega_o{}^2(1 - \cos\theta)}$

Cette équation correspond pour diverses valeurs de e, donc de l'énergie mécanique E du système, a une trajectoire de phase donnée dans le plan de phase (θ ,$\dot{\theta}$).

<u>Caractéristiques générales :</u> Les trajectoires de phases fermées correspondent à des mouvement périodiques. L'état du système étant décrit par la donnée de (θ ,$\dot{\theta}$) il parcourt indéfiniment une même sucession d'états pour un mouvement périodique. Ces trajectoires sont forcément décrites dans le sens horaire (θ est croissant pour $\dot{\theta} \geq 0$ et inversement).

On a repéré diverses types de trajectoire de phase sur le portrait de phase ci-dessous.
Ce portrait de phase doit être complété par une réplication par périodicité 2π sur θ.

<u>Le point (0) :</u> il correspond à la trajectoire de phase $(\theta = 0, \dot{\theta} = 0)$.
Il rend compte de la présence d'un équilibre stable en $\theta = 0$ (et de même en $\theta = 2\pi$, …, $\theta = 2\pi.n$).

<u>Courbe (1) :</u> Oscillations de faible amplitude, donnant un caractère quasi-sinusoïdal au mouvement : le comportement est approximativement celui d'un oscillateur harmonique. Le portrait de phase est une ellipse. Le changement d'échelle en ordonnée $\dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta}/\omega_0$ amène une trajectoire de phase pratiquement circulaire. (elle serait exactement circulaire pour un oscillateur harmonique).

Remarquons que l'approximation des petits mouvements conduit à : $\sin\theta \approx \theta$, donc à une équation différentielle du mouvement linéaire de forme : $\ddot{\theta} + \omega_o{}^2\theta = 0$ correspondant à un *oscillateur harmonique*.
Du point de vue énergétique, cette approximation revient à un DL2 au voisinage de 0 sur l'énergie potentielle amenant, comme $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$: $\dot{\theta}^2 = \frac{2}{l}\left(\frac{E}{ml} - g\frac{\theta^2}{2}\right)$ soit avec $\omega_o{}^2 = g/l$: $\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_o{}^2} + \theta^2 = \frac{2E}{mgl}$ équation d'un cercle.

<u>Courbe (2) :</u> L'amplitude θ_{max} des oscillations étant plus grande, le caractère non sinusoïdal devient observable. Cet écart à la linéarité apparaît clairement sur le portrait de phase : la trajectoire de phase n'est plus une ellipse.
La mise en évidence de ces effets non linéaires aurait été beaucoup plus difficile sur une représentation $\theta = \theta(t)$.

Le fait que les courbes (1) et (2) soient fermées permet de conclure au caractère périodique du mouvement. Là encore, l'observation d'un diagramme $\theta = \theta(t)$ ne permet pas de conclure aussi aisément à ce niveau.

<u>Courbe (3) :</u> $\dot{\theta}$ garde un signe constant (ici positif), on a donc un mouvement de révolution autour du point fixe O. θ va augmenter indéfiniment. Ce comportement s'observera en lançant le pendule avec une énergie cinétique initiale suffisante (donc pour une valeur d'énergie mécanique E suffisamment grande).

Remarque : Ces conclusions sont faites pour une tige rigide de masse négligeable ; dans le cas où le pendule est suspendu par un fi, ce fil peut ne pas rester tendu durant le mouvement, ce qui complique notablement le problème.

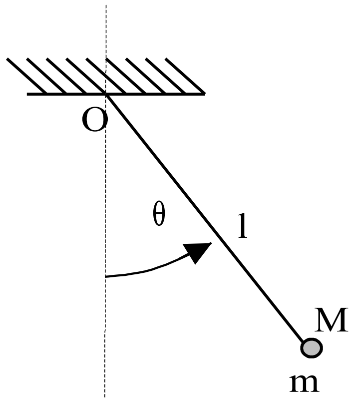
<u>Courbe (4) :</u> Cas critique, limite entre les mouvements oscillatoires (1) et (2) et les mouvements de type révolutifs (3). Ce cas correspond à la limite d'un mouvement oscillatoire, d'amplitude π = 1/2 tour. On observe un passage par les points d'équilibres instables $-\pi$, π, 3π etc… : en ces points on a $\theta = \theta_{éq}$ et $\dot{\theta} = 0$ mais la trajectoire de phase se prolonge au delà.

<u>En présence de frottements :</u>

Ces trajectoires de phase seront modifiées en présence d'un frottement : elles s'enroulent alors en spirale, convergent vers une position d'équiilibre stable. Ces points sont dits « centre attracteurs » des trajectoires de phase.

PORTRAIT DE PHASE

Exemple d'oscillateur non linéaire, le pendule simple :



intégrale première de l'énergie :

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

dérivation par rapport au temps
$\rightarrow$ équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

équation différentielle NON LINEAIRE.

Portrait de phase : $\dot{\theta} = f(\theta)$

de l'intégrale première de l'énergie :

$$e = \dot{\theta}^2 + 2\omega_o^2(1 - \cos\theta)$$

avec $\omega_O^2 = g/l$ et $e = 2E/ml^2$

Trajectoires de phase :

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{e - 2\omega_o^2(1 - \cos\theta)}$$

Pour θ faible :

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{e}{\omega_o^2} = \frac{\dot{\theta}^2}{\omega_o^2} + \theta^2$$

Equation d'un cercle