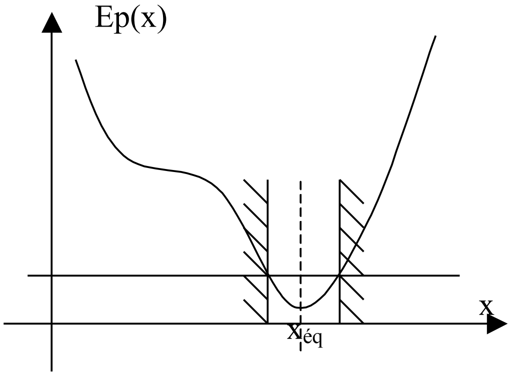
I L'oscillateur harmonique non amorti :

I-1 Potentiel harmonique, rappel linéaire, équation du mouvement : (rappels)

Soit un mobile modélisé comme un point matériel M(m), dont la position est décrite par un seule variable x. On suppose le système conservatif.

La résultante des forces qui travaillent dérive de l'énergie potentielle Ep(x).
On suppose l'existence d'une position d'équilibre stable de coordonnée $x_{éq.}$



Si le système est doté d'une énergie mécanique (fixée par les conditions initiales du mouvement) suffisamment faible, il restera au voisinage de cette position d'équilibre. Le système apparaît piégé dans un puits de potentiel centré sur $x_{éq}$.

On peut alors "paraboliser" ce puits de potentiel, c'est à dire écrire Ep(x) sous forme d'un D.L. d'ordre 2 au voisinage de $x_{éq.}$

$$Ep(x) = Ep_{\min} + \left.\frac{dEp}{dx}\right)_{xéq}\left(x - x_{éq}\right) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq}\left(x - x_{éq}\right)^2$$

$x_{éq}$ étant une position d'équilibre stable, on aura : $\left.\frac{dEp}{dx}\right)_{xéq} = 0$ et $\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq} > 0$.

L'énergie potentielle s'écrit donc : $$Ep(x) = Ep_{\min} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq}\left(x - x_{éq}\right)^2$$

La force s'exerçant sur M est donc ***linéaire*** : $$F(x) = -\frac{dEp}{dx} = -\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq}\left(x - x_{éq}\right)$$
c'est à dire que la force est proportionnelle à l'écart entre la position x et la position d'équilibre $x_{éq}$.

Remarquons que comme $\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq} > 0$, F(x) apparaît bien comme une ***force de rappel*** vers la position d'équilibre, car F(x) est alors opposée à $(x - x_{éq})$.

En écrivant la conservation de l'énergie mécanique : E = Ec + Ep avec $Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, puis en dérivant cette équation de conservation par rapport au temps, on tire l'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{1}{m}\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq}\left(x - x_{éq}\right) = 0.$$

Cette équation peut aussi s'obtenir en écrivant la R.F.D., compte tenu de la linéarisation effectuée sur F(x) au voisinage de $x_{éq}$. :
la projection de la R.F.D. sur l'axe (Ox) donne $m\ddot{x} = F(x)$ qui conduit bien à l'équation précédente en remplaçant F(x) par son expression en fonction de l'énergie potentielle.

I-2 Equation horaire (rappels) :

L'équation du mouvement ainsi obtenue : $\ddot{x} + \frac{1}{m}\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq}\left(x - x_{éq}\right) = 0$

est dite ***équation d'un oscillateur harmonique***.

Elle s'écrit formellement : $\ddot{x} + \omega_o{}^2\left(x - x_{éq}\right) = 0$ avec $\omega_o{}^2 = \frac{1}{m}\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq} \geq 0$

L'équation sans second membre $\ddot{x} + \frac{1}{m}\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq} x = 0$ admet pour équation caractéristique : $r^2 + \omega_o{}^2 = 0$ en posant $\omega_o = \sqrt{\frac{1}{m}\left.\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{xéq}}$

Ses solutions seront des fonctions sinusoïdales du temps, de pulsation ω_o.

Unes solution particulière, constante, de l'équation complète, consiste en : $x = x_{éq}$

La résolution conduit donc finalement à la solution générale : $x(t) = x_{éq} + A\cos(\omega_o t + \varphi)$

ou encore : $x(t) = x_{éq} + B\cos(\omega_o t) + C\cos(\omega_o t)$

où les constantes (A, φ) ou (B, C) seront déterminées par les conditions initiales du mouvement : valeurs initiales de la position x(0) et de la vitesse $\dot{x}(0)$.

Le système va osciller autour de la position d'équilibre avec une période $T_o = 2\pi/\omega_o$ indépendante de l'amplitude A des oscillations : on parle d'oscillation ***isochrones***.

La pulsation et la période obtenues ici, dans un modèle s'affranchissant de tout frottement, sont dites ***pulsation propre*** et ***période propre*** de l'oscillateur.

La position x(t) va évoluer sinusoïdalement entre les valeurs $x_{éq} - A$ et $x_{éq} + A$.

La quantité A est par définition l'***amplitude*** des oscillations ; x(t) décrit donc un intervalle d'amplitude 2A centré sur $x_{éq}$ (sic).

La quantité angulaire $(\omega_o t + \varphi)$, nommée ***phase instantanée***, détermine la valeur de x à l'instant t.

Nous pouvons vérifier que x(t) retrouve périodiquement les mêmes valeurs, chaque fois que sa phase aura varié de 2π ;

donc pour un intervalle de temps $\Delta t = T_o$ tel que $(\omega_o t + \varphi) + 2\pi = (\omega_o(t + \Delta t) + \varphi)$

qui conduit à : $T_o = 2\pi/\omega_o$.

L'angle φ correspond à la valeur de la phase pour t = 0 ; φ est la ***phase à l'origine***.