F Systèmes formés de deux points matériels

Nous allons aborder ici l'étude de problèmes concernant non plus un point matériel, mais des systèmes modélisables comme formés de plusieurs points matériels. Le programme préconise (avec raison !) de se restreindre au cas de deux points matériels, ce qui a l'avantage d'alléger un cours qui serait sinon encombré de sommations indicées. Une fois les concepts assimilés, il est aisé de généraliser les résultats au cas de n points matériels, voire au cas d'un solide (voir cours de deuxième année, de S2I en PSI, de physique en PC).

Un système de deux points matériels est un ensemble de deux objets physiques, dont chacun est assimilable à un point matériel.
On note A_i la position de chacun des points, m_i leur masse respectives (i = 1 ou 2). Un système de n points sera noté $\{(A_i, m_i)\}$. Un solide peut se décomposer en une infinité d'éléments de volume $d\tau$ centrés en des points A, chacun portant une masse $dm = \rho(A)d\tau$.

La masse totale M_{tot} s'exprimera donc par : $M_{tot} = m_1 + m_2$
ou : $M_{tot} = \sum_i m_i$ ou $M_{tot} = \iiint_V \rho(A)\,d\tau$

I Centre d'inertie :

C'est le barycentre G du système $\{(A_1, m_1) ; (A_2, m_2)\}$. Le point G est positionné par rapport à un point O quelconque par la relation : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2}}{M_{tot}}$;

D'où en faisant O = G : $m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$

Soit en généralisant : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_i m_i\overrightarrow{OA_i}}{M_{tot}}$ donc $\sum_i m_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

Et $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\iiint_V \rho(A)\overrightarrow{OA}.d\tau}{M_{tot}}$ donc $\iiint_V \rho(A)\overrightarrow{GA}.d\tau = \vec{0}$

On pourra projeter ces relations vectorielles pour calculer la position de G. Des considérations de symétrie permettent de notablement simplifier la détermination du centre d'inertie : G appartient aux éléments de symétrie du système (plan, axe ou centre de symétrie).
exemple : le centre d'inertie d'une sphère homogène est évidemment situé au centre de cette sphère etc.

Un système de solides sera décomposable en différentes parties, de masses totales m_i, dont on pourra déterminer les barycentres G_i. Le barycentre G de l'ensemble est alors celui du système $\{(G_i, m_i)\}$.
Exemple : système Terre Lune ; machine suspendue sur un bâti …

II Eléments cinétiques : Rappelons, en introduction, les éléments cinétiques pour un point matériel M de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel d'étude R_o.

- quantité de mouvement (ou impulsion) : $\vec{p} = m\vec{v}$,
- moment cinétique par rapport à un point O : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$,
- énergie cinétique : $E_C = \dfrac{1}{2}mv^2$

II-1 Résultante cinétique ou quantité de mouvement totale :

Pour le système $\{(A_1, m_1) ; (A_2, m_2)\}$, dont les points ont pour vitesses respectives $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans R_o, de centre O_o, avec m_1 et m_2 invariantes :

$$\overrightarrow{P_{tot}} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = m_1\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_oA_1} + m_2\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_oA_2} = \frac{d}{dt}\left(m_1\overrightarrow{O_oA_1} + m_2\overrightarrow{O_oA_2}\right)$$

soit en introduisant le barycentre G du système :

La résultante cinétique est égale à la quantité de mouvement qu'aurait le centre d'inertie G du système, affecté de la masse totale du système.

II-2 Moment cinétique :

Le moment cinétique en O du système $\{(A_1, m_1) ; (A_2, m_2)\}$, dans le référentiel R_o, est la simple somme des moments cinétique de chacun des points.
Il vaut donc :

Il dépend du point où on le calcule : soit $\vec{L}_O$ et $\vec{L}_{O'}$ calculés respectivement en O et O'.

$$\vec{L}_{O'} = \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}\right)\wedge m_1\overrightarrow{v_1} + \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_2}\right)\wedge m_2\overrightarrow{v_2}$$

en mettant en facteur le vecteur $\overrightarrow{O'O}$ on tire la relation torsorielle (de forme « BABAR ») :

On définit le torseur cinétique : $\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{P_{tot}} \\ \overrightarrow{L_O}\end{matrix}\right\}_O$ dont les éléments de réduction au point O sont respectivement la résultante cinétique et le moment cinétique.

II-3 Energie cinétique :

L'énergie cinétique du système dans le référentiel d'étude s'obtient simplement par addition des énergies cinétiques de chacun des points.

$$E_C = E_{C_1} + E_{C2} = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2$$

III Théorèmes de Koenig :

III-1 Référentiel barycentrique R* :

En introduction, pour montrer l'intérêt et l'aspect intuitif de ce référentiel, observons le mouvement d'un objet quelconque (brosse, règle…) lancé de façon quelconque.
Spontanément, la description du mouvement se fera en décomposant le mouvement en :

- le mouvement du centre d'inertie G dans le référentiel d'observation,
- le mouvement de l'objet « autour de G ».

Définition : R*, référentiel barycentrique, ou référentiel du centre d'inertie, ou référentiel du centre de masse :

- a pour origine le centre d'inertie G du système ,
- a des axes qui conservent une direction fixe au cours du mouvement, par rapport au référentiel du laboratoire.

Remarque : Même si le référentiel du laboratoire est galiléen, R* n'est en général pas galiléen, car

Exemple : lancé d'un objet

Propriété caractéristique de R* :

D'après la définition de G : $m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}=\vec{0}$ à tout instant.

Donc $\overrightarrow{P_{tot}}*=\vec{0}$: ***la résultante cinétique est nulle dans le référentiel barycentrique R****.

III-2 Théorème de Koenig pour le moment cinétique :

Ce théorème va faciliter l'expression du moment cinétique d'un système :

$$\vec{L}_O=\overrightarrow{L_{rG}}*+\overrightarrow{OG}\wedge M_{tot}\overrightarrow{v_G}$$

Le moment cinétique du système en O, dans le référentiel R_o est égal à la somme :

- ***du moment cinétique propre du système, c'est à dire du moment cinétique du système calculé en G, et évalué dans R* ,***
- ***du moment cinétique calculé en O, dans le référentiel R_o, du centre d'inertie G affecté de la masse totale du système.***

Démonstration : Par définition : $\vec{L}_O=\overrightarrow{OA_1}\wedge m_1\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{OA_2}\wedge m_2\overrightarrow{v_2}$;

introduisons G par la relation de Chasles : $\vec{L}_O=\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_1}\right)\wedge m_1\overrightarrow{v_1}+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_2}\right)\wedge m_2\overrightarrow{v_2}$

Par la loi de composition des vitesses :

Il vient donc : $\vec{L}_O=\overrightarrow{GA_1}\wedge m_1\overrightarrow{v_1}*+\overrightarrow{GA_2}\wedge m_2\overrightarrow{v_2}*+\overrightarrow{OG}\wedge\left(m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}\right)$

D'où le théorème.

III-3 Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique :

Ce théorème va faciliter l’expression de l’énergie cinétique d’un système :

$$E_C = E_C * + \frac{1}{2} M_{tot} v_G{}^2$$

L’énergie cinétique du système dans un référentiel R_o est la somme de l’énergie cinétique propre du système (évaluée dans le référentiel barycentrique) et de l’énergie cinétique du centre d’inertie affectée de la masse totale du système, évaluée dans R_o.

Démonstration :

Par définition : $E_C = E_{C_1} + E_{C2} = \frac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2{}^2$

Par la composition des vitesses : $\vec{v_i}^2 = \left(\overrightarrow{v_i *} + \overrightarrow{v_G}\right)^2 = v_i *^2 + 2\overrightarrow{v_i *} \bullet \overrightarrow{v_G} + v_G{}^2$

On tire : $E_C = \frac{1}{2} m_1 v_1 *^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2 *^2 + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_G{}^2 + \left(m_1 \overrightarrow{v_1 *} + m_2 \overrightarrow{v_2 *}\right) \bullet \overrightarrow{v_G}$

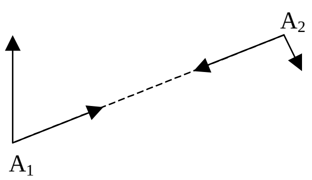
Le dernier terme est nul puisque $\overrightarrow{P_{tot} *} = \vec{0}$

<u>IV Dynamique d’un système :</u>

IV-1 Forces intérieures, forces extérieures :

Dans le bilan des forces appliquées à un système de points, on distinguera :

- les forces extérieures, dues aux interactions du système avec l’extérieur,
- les forces intérieures, forces d’interaction entre A_1 et A_2.



Par le principe des actions réciproques : $\overrightarrow{F_{2/1}} = -\overrightarrow{F_{1/2}}$, $\overrightarrow{F_{2/1}}$ et $\overrightarrow{F_{1/2}}$ étant portées par la droite (A_1A_2).

• ***La résultante des forces intérieures est nulle*** : $\Sigma \overrightarrow{F_{\text{int}}} = \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{1/2}} = \vec{0}$

Ce résultat se généralise à tout système (en associant les points deux à deux).

• ***La résultante des forces se réduit à la résultante des forces extérieures.***

$$\sum \vec{F} = \Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_{1ext}} + \overrightarrow{F_{2ext}} = \sum_i \overrightarrow{F_{iext}}$$

IV-2 Moments résultants :

La aussi on distinguera les moments résultants des forces extérieures et des forces intérieures.
Le moment résultant en O des forces intérieures est :

$$\overrightarrow{M_{O\text{int}}} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{F_{1/2}} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{F_{1/2}}$$

donc : $\overrightarrow{M_{O\text{int}}} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \left(\overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{1/2}}\right) + \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{F_{1/2}}$

• ***Le moment résultant des forces intérieures est nul :*** $\overrightarrow{M_{O\text{int}}} = \vec{0}$

interprétation graphique : en se souvenant que le moment d’une force n’est pas modifiée en la faisant glisser sur sa droite d’action.

• ***Le moment résultant se réduit donc au moment résultant des forces extérieures***:

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{M_{Oext}} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F_{1ext}} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{F_{2ext}}$$

Résultat qui là aussi se généralise aisément à un système de n points en raisonnant par paires successives.

Remarquons que le moment résultant dépend du point où on le calcule ; il répond à une relation torsorielle :

On définit le torseur des actions mécaniques : $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{M_O} \\ \Sigma\overrightarrow{F_{ext}} \end{Bmatrix}_O$ dont les éléments de réduction au point O sont respectivement le moment résultant et la résultante des forces extérieures.

La démonstration de cette relation est strictement identique à celle présentée pour le moment cinétique.

IV-3 Théorème de la résultante cinétique (TRC) et théorème du centre d'inertie (TCI) :

Le mouvement est étudié dans le référentiel R_o, supposé galiléen.
En appliquant la relation fondamentale de la dynamique successivement à A_1 et A_2 :

$$\frac{d\overrightarrow{p_1}}{dt} = \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{1ext}} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{p_2}}{dt} = \overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2ext}}$$

Puis en sommant les deux relations, avec : $\overrightarrow{P_{tot}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$ et $\Sigma\overrightarrow{F_{\text{int}}} = \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{1/2}} = \vec{0}$
On en déduit le TRC :

Dans le cas où les masses m_1 et m_2 sont invariantes, la R.F.D. s'écrit pour chaque point

$$m_1\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} = \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{1ext}} \quad \text{et} \quad m_2\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt} = \overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2ext}}$$

En additionnant ces deux relations, il vient : $\frac{d}{dt}\left(m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}\right) = \Sigma\overrightarrow{F_{ext}}$

D'où le TCI :

Le mouvement du centre d'inertie G se ramène au mouvement d'un point matériel, affecté de la masse totale du système et subissant l'action correspondant à la résultante des forces extérieures.

N.B. : Les forces intérieures au système n'affectent pas le mouvement du centre d'inertie.

Exemples : - Simulation en TP du mouvement d'une étoile double
- Lancer de deux masses liées par un ressort, préalablement comprimé.

Le champ d'application du TCI se restreint au cas de systèmes fermés, de masse totale invariante (il faut que G puisse être défini…). Le TRC est donc plus général. Son emploi pour des systèmes ouverts (propulsion d'une fusée…) sera abordé en seconde année.

La notion même de point matériel est directement liée au TCI : le fait de ramener l'étude du mouvement d'un objet réel, (skieur, planète,…) à l'étude du mouvement d'un point consiste en fait à étudier le mouvement du centre d'inertie de l'objet.

IV-4 Cas d'un système fermé et isolé :

Soit un système isolé, donc sans interaction avec l'extérieur : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$

Si le système est fermé, c'est à dire de masse totale invariante, le TCI s'applique.

On en déduit, dans tout référentiel R_o galiléen :

R*, référentiel barycentrique est alors lui-même nécessairement galiléen : il a un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à R_o galiléen.

IV-5 théorème du centre d'inertie (TCI) en référentiel non galiléen :

le TCI dans un référentiel non galiléen mettra en jeu les ***pseudo-forces d'inertie*** s'exerçant sur chacun des points du système.

IV-6 Théorème du moment cinétique (TMC) :

IV-61 TMC en un point fixe d'un référentiel galiléen :

Dans R_o, supposé galiléen, on peut appliquer le TMC en u point fixe O pour chacun des points matériels du système : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O(A_1)}}{dt} = \overrightarrow{M_{O1ext}} + \overrightarrow{M_{O2/1}}$

L'addition des relations amène : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{M_{Oext}}$ car $\overrightarrow{M_{O\text{int}}} = \vec{0}$

La dérivée du moment cinétique en O par rapport au temps est égale au moment résultant en O des forces extérieures.

Soit : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{M_{Oext}} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F_{1ext}} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{F_{2ext}}$

La projection du TMC sur un axe Δ fixe dans le référentiel R_o, s'obtient en multipliant scalairement par un unitaire $\vec{u}$ de Δ : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} \bullet \vec{u} = \dfrac{dL_\Delta}{dt} = \overrightarrow{M_{Oext}} \bullet \vec{u} = M_{\Delta ext}$

Le point O choisi a pour seules contraintes d'être fixe et d'être situé sur Δ.

IV-62 TMC en un point fixe du référentiel barycentrique R :*

Nous allons montrer que le TMC va pouvoir s'appliquer dans les mêmes termes dans R*, en un point fixe (usuellement en G). Cette propriété est d'autant plus remarquable que R* n'est pas nécessairement galiléen (il ne l'est que pour un système isolé).

Cette propriété peut s'établir en s'appuyant sur la composition de mouvement entre R_o et R*, ou en utilisant le théorème de Koenig et la formule de Varignon. L'idée essentielle reste le fait que R* n'a pas de rotation par rapport à R_o.

Pour tout système, on peut écrire par le théorème de Koenig :
$\vec{L}_O = \overrightarrow{L_{rG}}* + \overrightarrow{OG} \wedge M_{tot}\overrightarrow{v_G}$. On choisit ici O fixe dans R_o, supposé galiléen.
Dérivons par rapport au temps, dans R_o :

$$\left.\frac{d\vec{L}_O}{dt}\right)_{Ro} = \left.\frac{d\overrightarrow{L_{rG}}*}{dt}\right)_{Ro} + \left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{Ro} \wedge M_{tot}\overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{OG} \wedge M_{tot}\left.\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}\right)_{Ro}$$

Or : $\left.\frac{d\overrightarrow{L_{rG}}*}{dt}\right)_{Ro} = \left.\frac{d\overrightarrow{L_{rG}}*}{dt}\right)_{R*} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{L_{rG}}* = \left.\frac{d\overrightarrow{L_{rG}}*}{dt}\right)_{R*}$ car on n'a pas de rotation de R* / R_o.

Par ailleurs $\left.\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right)_{Ro} \wedge M_{tot}\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{v_G} \wedge M_{tot}\overrightarrow{v_G} = \vec{0}$

Enfin, par le TCI : $M_{tot}\left.\frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt}\right)_{Ro} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$ Il vient donc : $\left.\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}\right)_{Ro} = \left.\frac{d\overrightarrow{L_{rG}}*}{dt}\right) + \overrightarrow{OG} \wedge \sum \overrightarrow{F_{ext}}$

Or : $\left.\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}\right)_{Ro} = \overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{M_{Oext}} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F_{1ext}} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{F_{2ext}}$

D'où par différence : $\left.\frac{d\overrightarrow{L_{rG}}*}{dt}\right)_{R*} = \overrightarrow{M_{Gext}} = \overrightarrow{GA_1} \wedge \overrightarrow{F_{1ext}} + \overrightarrow{GA_2} \wedge \overrightarrow{F_{2ext}}$

La dérivée du moment cinétique du système par rapport au temps, calculée dans R*, est égale au moment résultant en G des forces extérieures

On peut bien sûr projeter cette relation sur un axe Δ*, <u>fixe dans R*</u>, afin d'avoir une écriture scalaire du TMC : $\frac{d\overrightarrow{L_{rG}}*}{dt} \bullet \vec{u} = \frac{dL_{\Delta*}}{dt} = \overrightarrow{M_{Gext}} \bullet \vec{u} = M_{\Delta*ext}$

Conclusion :

Le TMC , ou sa projection sur un axe fixe du référentiel, peut s'appliquer dans deux configurations à un système de points :
• en un point O fixe d'un référentiel galiléen R_o (ou sur un axe fixe de R_o),
• en le barycentre G (fixe !) du référentiel barycentrique R* (ou sur un axe fixe de R*).
Dans ce dernier cas, il n'y a pas lieu de prendre en compte les éventuelles forces d'inertie.

IV-63 TMC pour un système isolé :

En considérant un système tel que le moment résultant des actions extérieures soit nul
$\overrightarrow{M_{Oext}} = \vec{0}$ alors : $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{M_{Oext}}$ amène $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{Cste}$.

Le moment cinétique d'un système isolé se conserve dans un référentiel galiléen ou dans le référentiel barycentrique.