V Théorèmes énergétiques :

Nous avons distingué dans les chapitres précédents les forces extérieures et les forces intérieures. Nous avons constaté que les forces intérieures n'intervenaient pas dans les théorèmes dynamiques (TRC, TCI, TMC).
Nous allons voir ici que ***le travail des forces intérieures n'est pas nul***, et qu'il devra donc être pris en compte énergétiquement.

V-1 Puissance des forces extérieures :

Signalons simplement ici que, comme dans le cas du point matériel, la vitesse des particules dépend du référentiel du définition du mouvement ; la puissance des forces extérieures en dépend donc aussi.
Pour le système $\{(A_1, m_1) ; (A_2, m_2)\}$:

- dans un référentiel R_o : $P_{ext} = \overrightarrow{F_{1ext}} \bullet \vec{v_1} + \overrightarrow{F_{2ext}} \bullet \vec{v_2}$
- dans un autre référentiel R'_o : $P_{ext}' = \overrightarrow{F_{1ext}} \bullet \vec{v_1}' + \overrightarrow{F_{2ext}} \bullet \vec{v_2}' \neq P_{ext}$

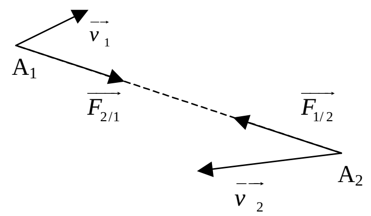
Le travail $\delta W_{ext} = P_{ext} dt$ dépendra lui aussi du référentiel.

V-2 Puissance des forces intérieures :

Nous avons établi précédemment : $\Sigma \overrightarrow{F_{\text{int}}} = \vec{0}$ et $\Sigma \overrightarrow{M_{O\text{int}}} = \vec{0}$

Les actions intérieures au système n'ont pas d'effet dynamique à l'échelle du système.
Cependant le travail la puissance des forces intérieures ne sera pas nul dans le cas général.
Nous allons le montrer sur le cas d'un système de deux points :

Dans un référentiel R_o quelconque, la puissance des forces intérieures vaut par définition :



$P_{int} =$

Or le principe des actions réciproques affirme : $\overrightarrow{F_{2/1}} = -\overrightarrow{F_{1/2}}$

Il vient donc : soit : $P_{\text{int}} = \overrightarrow{F_{1/2}} \bullet \left(\dfrac{d\overrightarrow{O_oA_2}}{dt} - \dfrac{d\overrightarrow{O_oA_1}}{dt} \right) = \overrightarrow{F_{1/2}} \bullet \dfrac{d\overrightarrow{A_1A_2}}{dt}$

Posons : $\overrightarrow{A_1A_2} = r\vec{u}$ et $\overrightarrow{F_{1/2}} = F_{1/2}\vec{u}$ puisque d'après le principe des actions réciproques, les forces d'interaction intérieures sont portées par (A_1A_2).

P_{int} s'écrit alors : $P_{\text{int}} = F_{1/2}\vec{u} \bullet \dfrac{d(r\vec{u})}{dt} = F_{1/2}\vec{u} \bullet \left(r\dfrac{d\vec{u}}{dt} + \dfrac{dr}{dt}\vec{u} \right)$

Or : $\vec{u} \bullet \dfrac{d\vec{u}}{dt} =$ car

Finalement : $P_{int} =$ et $\delta W_{int} =$

Nous tirons de ces relations trois résultats fondamentaux :

(1) La puissance des forces intérieures n'est pas nulle dans le cas général : $P_{\text{int}} \neq 0$;

(2) P_{int} est indépendante du référentiel d'étude : la puissance des forces intérieures est indépendante du référentiel d'étude ; elle ne dépend que du mouvement relatif des points matériels en interaction, et précisément de la variation de leur distance r.

(3) En l'absence de mouvement relatif, ou plus précisément en l'absence de variation de la distance r qui sépare les points en interaction intérieure, la puissance des forces intérieures P_{int} sera nulle.

Concrètement, si le système ne se déforme pas dans le mouvement, c'est à dire si la distance entre deux points A_1 et A_2 du système ne varie pas, $P_{int} = 0$.

Cette notion s'étend au cas d'un solide, pour lequel, par définition, la distance entre deux points quelconques A_i et A_j du solide est invariante. $P_{int} = 0$ pour un solide.

V-3 Théorème de l'énergie cinétique :

On peut appliquer le théorème de la puissance cinétique (TPC) à chacun des deux points A_1 et A_2 constituants le système, soit :

et

En sommant, on tire :

Théorème de la Puissance Cinétique pour le système.

Où P_{int} = et dans le référentiel R_o, P_{ext} =

La puissance des forces extérieures <u>et</u> celle de forces intérieures interviennent dans la variation de l'énergie cinétique E_c du système.

Théorème de l'énergie cinétique :

Une écriture intégrale peut être tirée du théorème de la puissance cinétique, c'est le théorème de l'énergie cinétique (TEC) : $dE_c = \left(P_{\text{int}} + P_{ext}\right)dt = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{ext}$

S'intègre en :

Le travail des forces extérieures <u>et</u> le travail des forces intérieures interviennent dans la variation d'énergie cinétique du système.

<u>Remarque :</u> on peut facilement adapter ce théorème au cas d'un ***référentiel non galiléen***. Il faudra alors tenir compte, en sus des actions précédentes, du travail des pseudos forces d'inertie, sachant que la force de Coriolis ne travaille pas puisqu'elle est orthogonale au mouvement : $\overrightarrow{f_{ic}} = -2m\overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{v_r}$ amène : $\overrightarrow{f_{ic}} \bullet \overrightarrow{dM} = \left(-2m\overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{v_r}\right) \bullet \overrightarrow{v_r}dt = 0$ pour chaque point du système.

exemple **:** Un patineur de masse m_A = 80 kg et une patineuse de masse m_B = 50 kg sont immobiles sur la glace. Ils se repoussent mutuellement en développant une puissance de 0,80 kW sur une durée d'une seconde. Evaluer les vitesses v_A et v_B atteintes par chacun d'eux.

V-4 Energie potentielle :

V-41 Energie potentielle d'interaction du système avec l'extérieur :

Les forces extérieures $\overrightarrow{F_{1ext}}$ et $\overrightarrow{F_{2ext}}$ peuvent être conservatives, c'est à dire dériver d'une énergie potentielle.
L'énergie potentielle E_{pext} du système est alors tout simplement la somme des énergies potentielles d'interaction avec l'extérieur des points le constituant :

$$E_{pext} = E_{p1ext} + E_{p2ext}$$

ainsi la relation : $\overrightarrow{F_{ext}} = -\overrightarrow{grad}E_{pext}$ conduit bien à $\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{F_{1ext}} + \overrightarrow{F_{2ext}} = \sum_i \overrightarrow{F_{iext}}$

Energie potentielle de pesanteur

Considérons le système {(A_1, m_1) ; (A_2, m_2)} placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme. Chaque poids $m_i\vec{g}$ dérive d'une énergie potentielle de pesanteur $E_{p,i} = m_i g z_i$, l'axe (O_oz) étant orienté verticalement vers le haut.

L'énergie potentielle de pesanteur du système s'écrit donc : $E_p = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$
Soit en introduisant le barycentre G du système, de cote z_G avec :

$z_G =$

Il vient finalement : $E_p = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = M_{tot}.g.z_G$ (défini à une constante près)

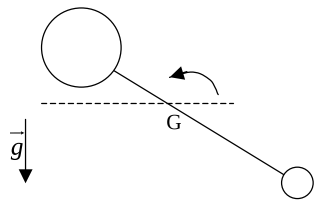
L'énergie potentielle de pesanteur du système correspond à celle du barycentre G qui serait affecté de la masse totale M_{tot} du système.

Le travail de pesanteur ne dépend donc que des variations de l'altitude z_G du centre de gravité du système.

$$\delta W = -M_{tot}g.dz_G = -dE_p$$

ou sous forme intégrale : W =

exemple :
si le système tourne autour de G, avec G maintenu à altitude constante, alors W = 0



V-42 Energie potentielle d'interactions intérieures au système :

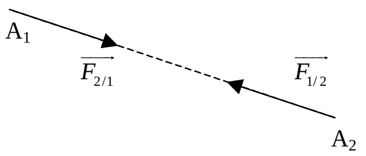
Les forces intérieures peuvent elles aussi être conservatives. Ce cas particulier est néanmoins très fréquent.
Par définition : $\delta W_{\text{int}} = \overrightarrow{F_{2/1}} \bullet d\overrightarrow{O_o A_1} + \overrightarrow{F_{1/2}} \bullet d\overrightarrow{O_o A_2}$ avec $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}} = F_{1/2}\overrightarrow{u_r}$

En posant $\overrightarrow{A_1 A_2} = r\overrightarrow{u_r}$, on a montré : $\delta W_{\text{int}} =$

Si la force d'interaction ne dépend que de la distance r entre les deux points : $F_{1/2} = F(r)$
Alors :

La force d'interaction dérive donc de l'énergie potentielle E_{pint} telle que :

Application : énergie potentielle pour les interactions newtoniennes.
Considérons le cas de l'interaction gravitationnelle entre les deux masses m_1 et m_2 constituant le système :



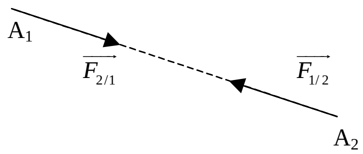
Alors : $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}} = F(r)\overrightarrow{u_r} =$

d'où $dE_{pint} = -\delta W_{int} =$

On tire par intégration : $E_{pint} =$

En procédant de même dans le cas d'une interaction coulombienne, on obtiendra sans difficulté : $E_{p\text{int}} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o r} + cste$

Application 2 : force de rappel élastique entre deux points.
Cette force s'exerçant entre les deux masses A_1 et A_2 constituant le système, distants de $r = A_1A_2$ et en notant $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}}{r}$: $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{F_{2/1}} = F(r)\overrightarrow{u_r} = -k(r - l_o)\,\vec{u}$



d'où $dE_{pint} = -\delta W_{int} = +k(r - l_o).dr$ On tire par intégration : $E_{p\text{int}} = \dfrac{1}{2}k(r - l_o)^2$

V-4 Energie mécanique :

Pour chaque interaction conservative, le terme de travail va être égal à la diminution d'énergie potentielle correspondante : $W_{cons} = -\Delta E_p$

Prenons le cas d'un système avec des forces intérieures conservatives ; le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$dE_c = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = -dE_{pint} + \delta W_{ext}$$

En introduisant : $E = E_c + E_{pint}$ il vient alors : $dE = dE_c + dE_{pint} = \delta W_{ext}$

ou sous forme intégrale : $\Delta E = W_{ext}$

Si de plus les forces extérieures sont elles aussi conservatives, on aura : $\delta W_{ext} = -dE_{pext}$

En posant $E = E_c + E_{pint} + E_{pext}$, il viendra finalement : $dE = 0$ soit $\Delta E = 0$
Ce qui traduit ici la conservation de l'énergie mécanique du système.

Attention ! tous le systèmes ne sont pas conservatifs, soit par la présence d'interactions non conservatives avec l'extérieur (par exemple des frottements) soit par le fait d'interactions intérieures non conservatives.

Retenons donc le cas le plus général : $\boxed{\Delta E = W_{non\ cons} = W_{int\ non\ cons} + W_{ext\ non\ cons}}$

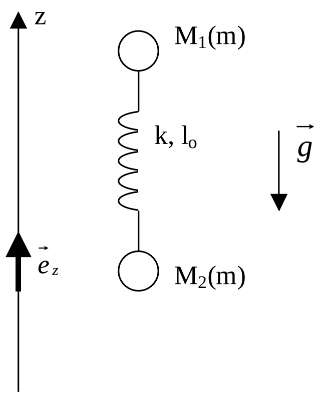
pour $E = E_{pext} + E_{pint} + E_c$

Dans le cas général, l'énergie mécanique ne se conserve pas** ; **elle varie avec le travail des forces non conservatives intérieures ou extérieures au système. Ces travaux peuvent résulter de frottements, de déformations du système, de phénomènes dissipant de l'énergie au sein du système (explosion…) etc.

L'écriture différentielle de cette relation est le théorème de la puissance mécanique

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = P_{\text{int}\,noncons} + P_{\text{ext}\,noncons}}$$

exercice :



M_1 et M_2 de masses identiques m sont reliés par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_o. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre, galiléen.

A $t < 0$, M_1 est tenu à $z_1 = (l_o/2) + (mg/2k) + h$ et M_2 se trouve à la cote : $z_1 = -(l_o/2) - (mg/2k)+h$.
G est alors à la cote $z_G = h$.

1°) Vérifier que M_2 est en équilibre à $t < 0$. A $t = 0$, on lâche M_1 sans vitesse. Déterminer $z_G(t)$.

2°) On pose : $z_1 = z_G + x$ et $z_2 = z_G – x$.
Déterminer l'énergie cinétique du système en appliquant le théorème de Koenig. Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de z_G et de x et en déduire $z_1(t)$ et $z_2(t)$.