A THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

Ce chapitre est l'occasion d'introduire un nouvel outil de la mécanique. Il importe d'assimiler pleinement ce théorème, dont l'emploi sera réitérant dans tous les chapitres à venir de cette deuxième partie du cours de mécanique.
Une part des notions et méthodes utilisées a été introduite à l'occasion du cours de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur, ou lors de cours précédents (Electrostatique : actions d'un champ externe sur un dipôle).
Elles sont rappelées ci-après.

1. Moment d'une force :

1-1. Moment d'une force en un point :

Par définition, le moment de la force $\vec{F}$, appliquée en un point M, calculée en un point O vaut :

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

$\vec{F}$ constitue un vecteur lié : il importe de préciser la position M en laquelle $\vec{F}$ s'applique.

D'après les règles du produit vectoriel $\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ est un vecteur :

- orthogonal au plan $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{F}\right)$,
- dont le sens est tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{F}, \overrightarrow{M_O}\right)$ soit un trièdre direct (règles du « tire-bouchon », ou « des trois doigts de la main droite »),
- dont la norme vaut : $\left\|\overrightarrow{M_O}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \wedge \left\|\vec{F}\right\| . \left|\sin\left(\overrightarrow{OM}, \vec{F}\right)\right| = OM.F.\left|\sin\left(\overrightarrow{OM}, \vec{F}\right)\right|$

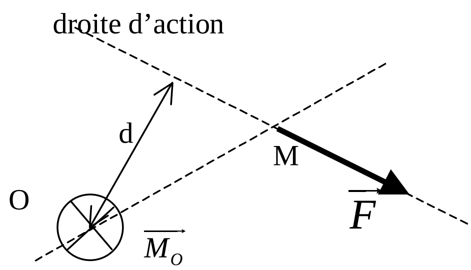
  Cette norme s'exprime en N.m.

Propriétés :

(1) On définit la ***droite d'action*** comme le support de la force $\vec{F}$.

$$\left\|\overrightarrow{M_O}\right\| = OM.F.\left|\sin\left(\overrightarrow{OM}, \vec{F}\right)\right| = d.F$$

où d est la distance entre la droite d'action et le point O où l'on calcule le moment.



$\overrightarrow{M_O}$ est donc invariant si la force $\vec{F}$ glisse le long de sa droite d'action.

(2) $\overrightarrow{M_O}$ est nul si la droite d'action passe par le point O. En effet, $\overrightarrow{OM}$ est alors colinéaire à $\vec{F}$ ce qui annule le produit vectoriel.

(3) Les moments de forces sont additifs : si $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, appliquée en M
$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F_1} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_2$.

(4) Le moment de $\vec{F}$ dépend du point où on le calcule :

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

(mnémotechnique : BABAR).

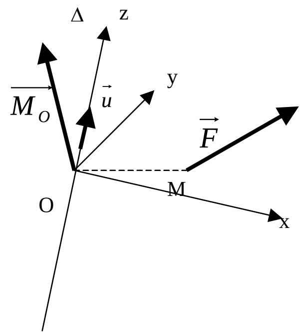
Cette relation est de forme torsorielle (voir SI). On peut définir le ***torseur des actions mécaniques***, exprimé par ses éléments de réduction en O : $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{M_O} \\ \vec{F} \end{Bmatrix}$

1.2 Moment d'une force par rapport à un axe orienté :

Cette notion va nous renvoyer à l'idée de ***bras de levier***.

Soit un axe Δ, passant par un point O, et dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}$. Par définition, on nomme moment de la force $\vec{F}$, par rapport à l'axe Δ, la quantité ***scalaire*** :

$$M_\Delta = \overrightarrow{M_O} \bullet \vec{u} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \bullet \vec{u}.$$



M_Δ est donc la projection du moment $\overrightarrow{M_O}$ sur l'axe Δ. Cette quantité est algébrique.

Le point O est un point quelconque de l'axe Δ. En effet, pour un point O' de Δ, on peut écrire :

$$\overrightarrow{M_{O'}} \bullet \vec{u} = \left(\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{F}\right) \bullet \vec{u} = \left(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\right) \bullet \vec{u} = M_\Delta$$

puisque le vecteur $\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}$ sera nécessairement orthogonal à $\vec{u}$.

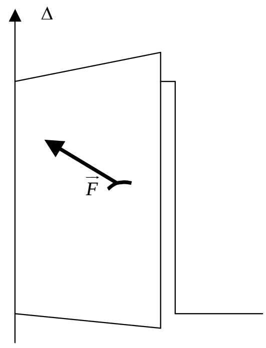
Moment d'une force par rapport à un axe et bras de levier :

Envisageons une situation quelconque, étudiée en coordonnées cylindriques (r, θ, z).

$$\overrightarrow{M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z.F_\theta \\ z.F_r - r.F_z \\ r.F_\theta \end{vmatrix}$$

En choisissant l'axe (Oz) comme axe de projection Δ, on obtient le moment par rapport à l'axe Δ : $M_\Delta = r.F_\theta$.
Seule la composante de $\vec{F}$ située dans un plan orthogonal à Δ intervient, et M_Δ ets proportionnel à la distance r séparant le point d'application de la force de l'axe Δ.

Exemple : ouverture ou fermeture d'une porte .



Les composantes $-z.F_\theta$ et $z.F_r - r.F_z$ sont compensées par l'action des gonds de la porte. Le seul mouvement possible est une rotation autour de Δ. Il est commander par la valeur de M_Δ.
$M_\Delta = r.F_\theta$: si $F_\theta > 0$ on ferme la porte, si $F_\theta < 0$ on l'ouvre.

L'effort exercé est d'autant plus efficace pour assurer une rotation de la porte que r est grand : c'est l'idée de bras de levier.
La composante F_r aurait tendance à arracher la porte, F_z aurait tendance à la sortir de ses gonds. L'action $\vec{F}$ sera plus efficace si elle est colinéaire à $\overrightarrow{e_\theta}$.

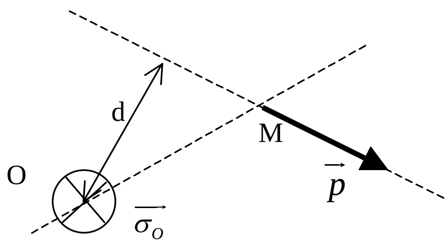
2. Moment cinétique :

2.1 Moment cinétique par rapport à un point :

Le moment d'une force est une grandeur dynamique (action mécanique),
Le moment cinétique est une grandeur cinématique (description du mouvement).

Par définition, le moment cinétique en O d'un point matériel M, de masse m, dans le référentiel (R), calculé en un point O est le moment en O de sa quantité de mouvement $\vec{p} = m\overrightarrow{v_{(M/(R))}}$. Il vaut : $\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{(M/(R))}}$

On retrouve des propriétés analogues au cas du moment d'une force :



D'après les règles du produit vectoriel,
$\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v_{(M/(R))}}$ est un vecteur :

- orthogonal au plan $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{p}\right)$,
- dont le sens est tel que $\left(\overrightarrow{OM}, \vec{p}, \overrightarrow{\sigma_O}\right)$ soit un

trièdre direct (règles du « tire-bouchon », ou « des trois doigts de la main droite »),

- dont la norme vaut : $\left\|\overrightarrow{\sigma_O}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \wedge \left\|\vec{p}\right\| . \left|\sin\left(\overrightarrow{OM}, \vec{p}\right)\right| = OM.p.\left|\sin\left(\overrightarrow{OM}, \vec{p}\right)\right|$

  Cette norme s'exprime en $kg.m^2.s^{-1}$

Propriétés :

(1) On considère la droite support de la quantité de mouvement $\vec{p}$.

$$\left\|\overrightarrow{\sigma_O}\right\| = OM.mv.\left|\sin\left(\overrightarrow{OM}, \vec{p}\right)\right| = d.m.v$$

où d est la distance entre la droite d'action et le point O où l'on calcule le moment.

$\overrightarrow{\sigma_O}$ est donc invariant si le point matériel M a une trajectoire rectiligne parcourue à vitesse constante.

(2) $\overrightarrow{\sigma_O}$ est nul si la droite support passe par le point O. En effet, $\overrightarrow{OM}$ est alors colinéaire à $\vec{p}$ ce qui annule le produit vectoriel.

(3) Le moment cinétique dépend du point où on le calcule :

$$\overrightarrow{\sigma_B} = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{p} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{p} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{\sigma_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{p}$$

(mnémotechnique : BABAR).

Cette relation est de forme torsorielle (voir SI). On peut définir le ***torseur cinématique***, exprimé par ses éléments de réduction en O : $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\sigma_O} \\ \vec{p} \end{Bmatrix}$

Expression en coordonnées polaires : cas d'un mouvement plan.
Ce cas de figure sera très fréquent dans les chapitres à venir.

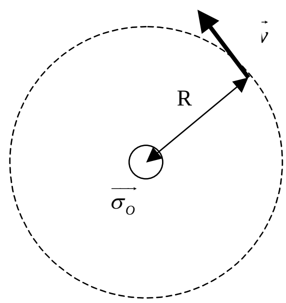
Dans la base cylindrique, de coordonnées (r, θ, z), à partir des expressions des vecteurs position et vitesse, on calcule :

$$\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} m\dot{r} \\ mr\dot{\theta} \\ m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -mz.r\dot{\theta} \\ z.m\dot{r} - r.m\dot{z} \\ mr^2\dot{\theta} \end{vmatrix}$$

Dans le cas particulier d'un mouvement plan : on peut choisir l'axe z tel que z = 0.

Le moment cinétique par rapport à O se réduit alors à : $\overrightarrow{\sigma_O} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$
Le moment cinétique est un vecteur orthogonal au plan du mouvement.

Exemple d'un mouvement circulaire :



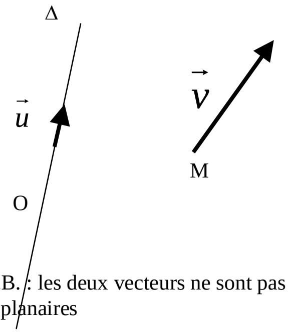
Dans ce cas, par hypothèse r = R = cste. La vitesse se réduit à $\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$. Son module vaut donc : v = R.$\dot{\theta}$ ou v = Rω en notant ω = $\dot{\theta}$ (on suppose $\dot{\theta}$ > 0 sur cet exemple).

Il vient donc : $\overrightarrow{\sigma_O} = mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} = mRv\overrightarrow{e_z} = mR^2\omega\overrightarrow{e_z}$

2-2. Moment cinétique par rapport à un axe :

Soit un axe Δ, passant par un point O, et dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}$. Le moment cinétique du mobile M, de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel (R), par rapport à l'axe Δ est par définition la quantité scalaire σ_Δ correspondant à la projection de $\overrightarrow{\sigma_O}$ sur l'axe Δ :

$$\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_O} \bullet \vec{u}$$



N.B. : les deux vecteurs ne sont pas coplanaires

On aura même valeur de σ_Δ quelque soit le point O choisi, pourvu qu'il soit situé sur l'axe Δ (voir démonstration analogue sur le cas des moments de forces par rapport à un axe).

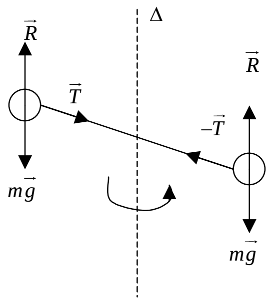
Expression en coordonnées cylindriques :
on calcule sans difficulté le moemnt cinétique par rapport à l'axe Δ = (Oz) en projetant selon : $\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_O} \bullet \vec{u} = mr^2 \dot{\theta}$

Le signe de σ_Δ dépend de celui de $\dot{\theta}$, c'est à dire du sens de rotation du mobile autour de l'axe Δ..

Signification physique du moment cinétique par rapport à un axe : expérience du tabouret tournant.

Un élève volontaire (généralement désigné d'office…) est assis sur un tabouret monté sur un plateau tournant. Il tient à bout de bras deux haltères. Une fois mis en mouvement, on constate que la vitesse de rotation augmente s'il ramène le haltères à proximité de son corps, et inversement.
Cette situation peut s'interpréter en la modélisant comme le cas de deux points matériel, lié par une barre non massique, susceptible de tourner autour d'un axe vertical Δ.

En admettant que les moments cinétiques de chacune des haltères vont s'additionner pour l'ensemble, on aura : $\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_O} \bullet \vec{u} = 2mr^2 \dot{\theta}$
en notant m la masse de chaque haltère et r la distance à l'axe Δ.



σ_Δ apparaît, pour le mouvement de rotation autour de Δ, comme l'analogue de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ pour le mouvement d'un point matériel.

En l'absence d'action mécanique, ces grandeurs vont se conserver :

- si $\sum \vec{F} = \vec{0}$ alors $\vec{p} = m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$, on aura un mouvement rectiligne et uniforme ;
- le moment cinétique se conservera si le moment des forces appliquées au système est nul, ce qui est le cas dans l'expérience. si $\sum \overrightarrow{M_O} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{\sigma_O} = \overrightarrow{cste}$.

En particulier par rapport à Δ : $\sum M_\Delta = 0$ donc $\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_O} \bullet \vec{u} = 2mr^2 \dot{\theta} = cste$.

En diminuant r, la conservation de σ_Δ implique une augmentation de $\dot{\theta}$.

Cette propriété de conservation sera justifiée plus loin, en s'appuyant sur le Théorème du Moment Cinétique, qui relie les variations par rapport au temps du moment cinétique au moment des forces appliquées au système.

De nombreuses situations sont analogues à l'expérience du tabouret tournant :

- le même phénomène est utilisé dans certaines figures de patinage artistique,
- les étoiles à neutrons sont des étoiles qui se sont rapetissé par effondrement gravitationnel, la conservation de leur moment cinétique fait que leur mouvement de rotation, initialement présent comme dans toutes les étoiles, va considérablement s'accélérer.