H Caractère galiléen approché de référentiels ; effets de marées

I Introduction :

Lorsque l'on veut décrire le mouvement de la Lune autour de la Terre, on se réfère en général au système Terre-Lune.

Mais le système Terre-Lune existe-t-il, c'est à dire peut-on le considérer comme un système de deux points isolé ?

La question repose de fait sur l'éventuelle influence du Soleil. On néglige à priori tout autre influence (autres planètes…).

La première idée qui vient est de supposer que l'interaction Terre-Soleil et l'interaction Lune Soleil sont probablement négligeables devant l'interaction Terre-Lune.
Examinons cette hypothèse :

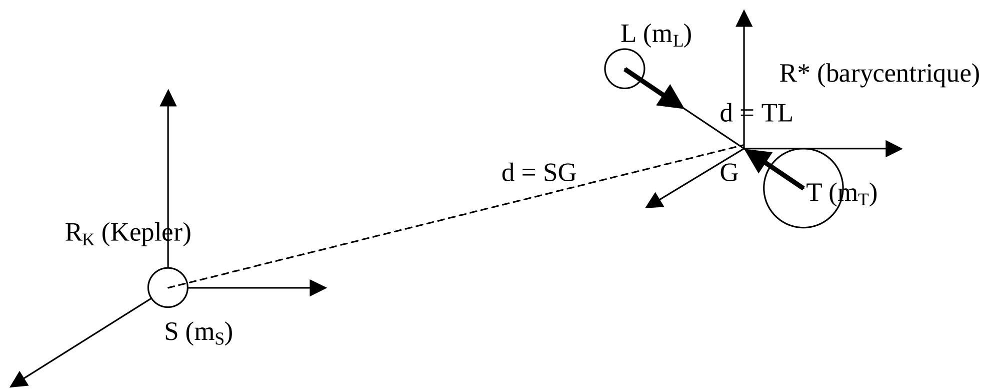
Données :
constante universelle de gravitation : $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.s.i.
masse du soleil : $m_S = 2{,}0.10^{30}$ kg ; masse de la Terre : $m_T = 6{,}0.10^{24}$kg ; masse de la Lune : $m_L = 7{,}3.10^{22}$ kg.
distance moyenne Terre-Lune : $r = 3{,}8.10^{8}$ m
distance moyenne Terre-Soleil : $d = 1{,}5.10^{11}$ m.

On peut ainsi évaluer un ordre de grandeur des interactions gravitationnelles :
- entre Terre et Soleil : $3{,}5.10^{22}$ N
- entre Soleil et Lune : $4{,}2.10^{20}$ N
- entre Terre et Lune : $2{,}0.10^{20}$ N.

Manifestement, notre première idée n'est pas la bonne !! Il faut chercher une autre explication.

II Terme de marée :

Le problème que nous venons de soulever a une portée plus générale : il concerne l'influence d'un champ de gravitation extérieur sur un système de deux points eux mêmes en interaction gravitationnelle. Conservons néanmoins à l'esprit l'exemple d'introduction :



On considère le système {(L,m_L), (T,m_T)} de deux points matériels en interaction gravitationnelle intérieure, placés dans le champ de gravitation extérieur créé par le point S(m_S).

Le référentiel de Kepler, basé sur le centre du Soleil est supposé galiléen.
G est le centre d'inertie du système ; R* est le référentiel barycentrique.

• Ecrivons la RFD pour L, dans R*, référentiel non galiléen ; en notant $\overrightarrow{G_S}(L)$ le champ de gravitation créé en L par S et $\overrightarrow{G_T}(L)$ celui créé en L par la Terre :

Comme R* est en translation par rapport à R_K :

donc : $\overrightarrow{f_{iC}} =$

et : $\overrightarrow{f_{ie}} =$

en effet, tous les points……..

Il faut donc déterminer l'accélération de G dans R_K.

• Ecrivons le TCI pour G, dans R_K, référentiel galiléen.
en notant $\overrightarrow{G_S}(T)$ le champ de gravitation créé en T par S :

dont on tire : $\overrightarrow{\gamma_e}(G) =$

En reportant ce résultat dans l'équation du mouvement de L dans R*, il vient :

$$m_L \frac{d^2\overrightarrow{GL}}{dt^2} = m_L \overrightarrow{G_S}(L) + m_L \overrightarrow{G_T}(L) - \frac{m_L{}^2}{m_L + m_T}\overrightarrow{G_S}(L) - \frac{m_L . m_T}{m_L + m_T}\overrightarrow{G_S}(T)$$

soit en réarrangeant les termes :

$$m_L \frac{d^2\overrightarrow{GL}}{dt^2} = m_L \overrightarrow{G_T}(L) + m_L . \frac{m_T}{m_L + m_T}\left(\overrightarrow{G_S}(L) - \overrightarrow{G_S}(T)\right)$$

Si l'on avait (à tort) considéré le référentiel R* comme galiléen, l'écriture de la RFD pour L aurait conduit simplement à : $m_L \frac{d^2\overrightarrow{GL}}{dt^2} = m_L \overrightarrow{G_T}(L)$

On définit le ***champ de marée*** $\overrightarrow{C}(L) = \frac{m_T}{m_L + m_T}\left(\overrightarrow{G_S}(L) - \overrightarrow{G_S}(T)\right)$

Le terme, $m_L \overrightarrow{C}(L) = m_L \frac{m_T}{m_L + m_T}\left(\overrightarrow{G_S}(L) - \overrightarrow{G_S}(T)\right)$ venant s'ajouter au terme d'attraction de la Terre sur la Lune est un terme dit de marée. Il représente l'influence du Soleil sur le mouvement de la Lune dans le référentiel R*.

On constate que ce terme s'annule si l'on peut confondre la valeur du champ de gravitation solaire en L avec celle qu'il a en T.

Dans le cas particulier où on considère $m_L << m_T$, ce terme se simplifie en :

$$m_L.\left(\overrightarrow{G_S}(L) - \overrightarrow{G_S}(T)\right)$$

Le ***champ de marée*** $\overrightarrow{C}(L) = \overrightarrow{G_S}(L) - \overrightarrow{G_S}(T)$ au point L correspond alors à l'écart entre la valeur du champ de gravitation solaire en L et en T car le centre d'inertie du système $\{(L,m_L), (T,m_T)\}$ est alors pratiquement confondu avec T.

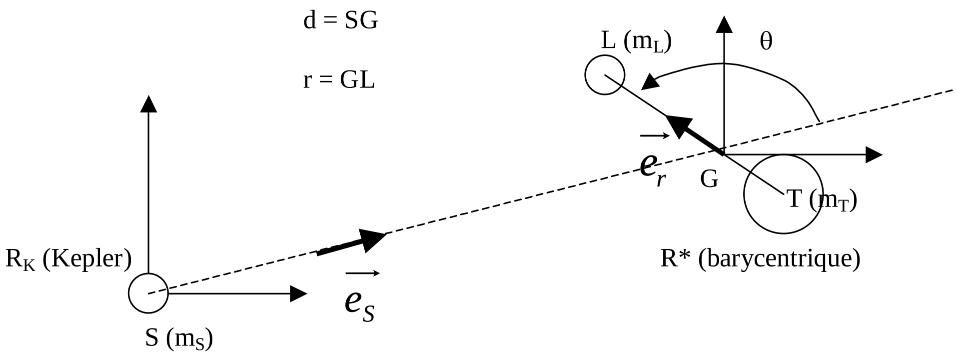
Conclusions :
le référentiel barycentrique du système de deux points $\{(L,m_L), (T,m_T)\}$ n'est pas galiléen. Le terme d'inertie est lié à l'interaction gravitationnelle avec le point S ; il se traduit par un terme de marée.

Ce terme de marée sera négligeable quand le champ de gravitation créé par S sera quasi-uniforme à l'échelle du système $\{(L,m_L), (T,m_T)\}$. Dans ces conditions, le mouvement de L dans R* est identique à celui que l'on obtiendrait pour un système de deux points isolés ; R* serait donc galiléen.

III Expression du terme de marée :

Cette étude ne figure pas au programme de Sup PCSI. Elle est abordée ici à titre d'exercice.

Par souci de simplification, on considère que le plan du mouvement de la Terre et de la lune est confondu avec le mouvement de la Terre autour du soleil (plan de l'écliptique).



On se limitera au cas où $m_L << m_T$. Donc $SG \approx ST = d$

On note $\overrightarrow{e_r}$ l'unitaire de (GL) et $\overrightarrow{e_S}$ l'unitaire de (SG) : $\overrightarrow{GL} = r\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{SG} = d\overrightarrow{e_S}$; $\theta = \left(\overrightarrow{e_S}, \overrightarrow{e_r}\right)$.

Le ***champ de marée*** vaut : $\overrightarrow{C}(L) = \overrightarrow{G_S}(L) - \overrightarrow{G_S}(G) = \dfrac{-Gm_S}{SL^2}\dfrac{\overrightarrow{SL}}{SL} + \dfrac{Gm_S}{d^2}\overrightarrow{e_S}$

Or $\overrightarrow{SL} = \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GL} = d\overrightarrow{e_S} + r\overrightarrow{e_r}$ donc $SL = \left(d^2 + r^2 + 2rd\cos\theta\right)^{1/2}$

Comme $d >> r$, par un DL1 en r/d : $SL = d\left(1 + 2\dfrac{r}{d}\cos\theta + \dfrac{r^2}{d^2}\right)^{1/2} \approx d\left(1 - \dfrac{r}{d}\cos\theta\right)$

ce qui amène : $\dfrac{1}{SL^3} = \left[d\left(1 + 2\dfrac{r}{d}\cos\theta + \dfrac{r^2}{d^2}\right)^{1/2}\right]^{-3} \approx \dfrac{1}{d^3}\left(1 - \dfrac{3r}{d}\cos\theta\right)$

donc $\dfrac{\overrightarrow{SL}}{SL^3} = \left(d\overrightarrow{e_S} + r\overrightarrow{e_r}\right)\dfrac{1}{d^3}\left(1 - \dfrac{3r}{d}\cos\theta\right)$

Il en résulte : $\vec{C}(L) = \dfrac{-Gm_S}{d^3}\left(1 - \dfrac{3r}{d}\cos\theta\right)\left(d\overrightarrow{e_S} + r\overrightarrow{e_r}\right) + \dfrac{Gm_S}{d^2}\overrightarrow{e_S}$

soit : $\vec{C}(L) = \dfrac{-Gm_S}{d^3} r\left(\overrightarrow{e_r} - 3\cos\theta\overrightarrow{e_S}\right)$

Les champs de gravitation sont en $1/d^2$ alors que le terme de marée décroît avec d comme r/d^3.
Il devient vite très faible quand r devient petit devant d.
Ceci rejoint la conclusion formulée au II.

IV Effets de marée dans l'univers. Quelques exemples :

Les situations évoquées ci-dessous sont des illustrations des notions présentées en II.

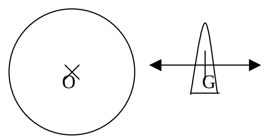
IV-1 Forces de marée produites par une planète sur un satellite :

Considérons le cas d'un spationaute M de masse m flottant librement aux alentours du centre d'inertie G d'une station orbitale, gravitant autour de la Terre.
L'étude est conduite dans le référentiel barycentrique R^* , lié à G, non galiléen, en translation circulaire dans le référentiel géocentrique R_o.
Les forces à considérer dans le problème sont :

- la force de gravitation : $m\overrightarrow{G_T}(M)$ où $\overrightarrow{G_T}(M)$ est le champ de gravitation terrestre en la position M,
- la force d'inertie d'entraînement : $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{\gamma_e}(M)$

R* étant en translation dans le référentiel géocentrique, on a même accélération d'entraînement en tout point : $\overrightarrow{\gamma_e}(M) = \overrightarrow{\gamma_e}(G) = \overrightarrow{\gamma_a}(G/R_o)$.

$\overrightarrow{\gamma_a}(G/R_o)$ est obtenu en appliquant le Théorème du Centre d'Inertie dans R_o :



$$M_{station}\,\overrightarrow{\gamma_a}(G/R_o) = M_{station}\,\overrightarrow{G_T}(G)$$

La R.F.D écrite dans le référentiel R* pour M donne donc : $m\overrightarrow{\gamma_r}(M) = m\overrightarrow{G_T}(M) - m\overrightarrow{G_T}(G)$

Si le spationaute M se trouve exactement en G : $m\overrightarrow{\gamma_r}(M) = \vec{0}$ M est donc alors en équilibre relatif dans R* : c'est l'état d'***impesanteur***.

Si M se déplace en un point différent de G, par exemple situé entre le centre de la Terre O et G, il est alors soumis à une force gravitationnelle plus forte, tout en subissant une force inertielle identique. La résultante, non nulle, est néanmoins très faible ; elle attire M vers O.
Elle vaut alors :

$$m\overrightarrow{\gamma_r}(M) = m\left(\overrightarrow{G_T}(M) - \overrightarrow{G_T}(G)\right) = m\vec{C}(M)$$

où $\vec{C}(M)$ est le champ de marée régnant en M.

Les mêmes forces de marée s'exercent sur les parois de la station, qui sont placées de part et d'autre du centre d'inertie G, tendant ainsi à les écarter.

Le même phénomène explique la formation des anneaux de Saturne, formés de débris rocheux qui ne peuvent s'agglomérer du fait des effets de marée produits au voisinage de cette planète.

IV-2 Marées océaniques sur la Terre :

Ce phénomène est dû au champ de marée perçu à la surface de la Terre, du fait de l'interaction avec le Soleil et la Lune. Ces effets se superposent. L'influence de la Lune est environ deux fois plus forte que celle du soleil.

Pour simplifier l'étude suivante, on ne prend en compte que l'effet de la Lune.

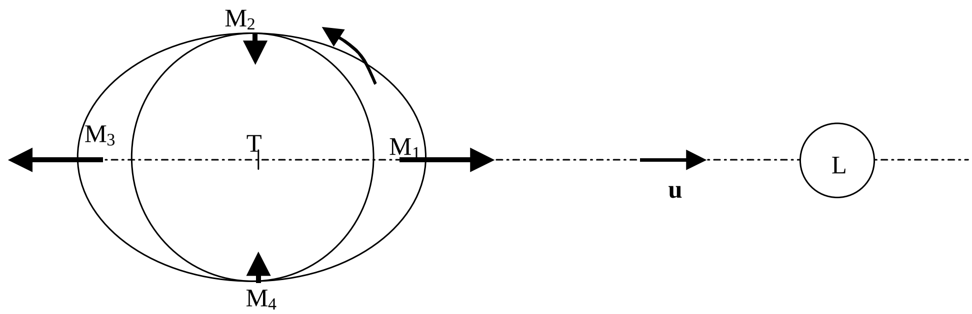
Un point M, de masse m, situé sur la Terre, subira dans le référentiel terrestre R_T :

- son poids $m\vec{g}(M)$ (on a vu que ce poids recouvre gravitation et force centrifuge due à la rotation de la Terre sur son axe)
- une force de marée : $m\vec{C}(M) = m\left(\overrightarrow{G_L}(M) - \overrightarrow{G_L}(T)\right)$

$\overrightarrow{G_L}(M)$ est le champ de gravitation produit par la Lune en la position M.

Le terme d'inertie d'entraînement $-m\overrightarrow{G_L}(T)$ traduit le mouvement du référentiel géocentrique dans le référentiel ayant pour origine le centre d'inertie du système Terre-Lune ; le centre T de la Terre, dans le système Terre-Lune, tourne autour du barycentre G du système, ce qui introduit bien un terme d'inertie :

$$\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{\gamma_e}(T) = -m\overrightarrow{G_L}(T) \text{ dans notre bilan de forces.}$$



La vue a été tracée selon l'axe Nord- Sud. Le sens de rotation de la Terre est indiqué par une flèche. Selon les positions M_1, M_2, M_3, M_4 l'intensité et le sens du champ de marée diffère, ce qui amène, par déformation de la couche océanique, à la formation d'un bourrelet (en M_1 et M_3). En M_1 et M_3 : marée haute ; en M_2 et M_4 : marée basse.

La rotation de la Terre fait qu'en un jour sidéral, un méridien donné passera successivement par les positions M_1, M_2, M_3, M_4 ce qui signifie que l'on aura deux marées hautes et deux marées basses sur cette période.

Remarque : Les hauteurs de marnage calculables à partir de la théorie que nous avons présenté ne sont valable que loin des côtes : on obtient h = 58 cm entre marées hautes et basses.
En fait, les marées maritime sont un effet dynamique où le terme de marée tient lieu d'excitation périodique.
Cet effet sera plus ou moins amplifié par des phénomènes de résonances selon la forme des côtes et des fond marins. On atteint ainsi des amplitudes de marées de l'ordre de 10 m dans la baie du Mont Saint-Michel.

Différentes questions viennent sérieusement compliquer ce problème :

- l'inclinaison de l'orbite lunaire par rapport au plan équatorial
- la Lune n'est pas immobile dans le référentiel barycentrique. Les deux objets Terre et Lune tourne autour de leur barycentre avec une période de 27,32 jours. Ceci amène, par superposition avec la rotation terrestre à une période de marées de 12h 25 mn.

- Il se conjugue un effet analogue dû au Soleil.

- Selon la position relative de la terre, de la Lune et du Soleil, l'amplitude des marées sera plus ou moins importante : marées de mortes eaux au premier et au dernier quartier, de vives eaux à la nouvelle et à la pleine Lune ; marées d'équinoxe de printemps ou d'automne où les effets cumulés du Soleil et de la Lune sont le plus important (le Soleil traverse alors le plan équatorial de la Terre).

IV-3 La face cachée de la Lune :

La Lune présente toujours la même face aux habitants de la Terre, ce qui a soulevé de nombreuses questions (en particulier sur ce qui pouvait se trouver sur la face cachée de notre satellite…).

La Lune est elle même soumise à des forces de marée du fait de son interaction avec la Terre. Le travail de ces forces de marée amène à une dissipation de l'énergie mécanique de la Lune, donc de son énergie cinétique de rotation.

Ce phénomène explique que la Lune a ainsi ralenti sa rotation, jusqu'à ne plus avoir de mouvement apparent vis à vis de la Terre : elle lui présente donc toujours la même face.