4. Le vecteur excentricité :

Le programme de Sup PCSI précise, concernant l'étude du mouvement d'une particule dans un champ newtonien qu'aucune méthode n'est imposée pour l'établissement de la nature des trajectoires : Formules de Binet, vecteur excentricité etc. Ceci signifie qu la démarche doit être guidée dans le cadre d'un sujet de concours.

On présente ci-après la méthode du vecteur excentricité, employant un vecteur $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km} - \vec{e_r}$ constant dans ce type de mouvements, et qui permet de remonter assez aisément à l'équation polaire de la trajectoire, ainsi qu'à l 'expression de l'énergie mécanique.

Aucune mémorisation n'est exigible.

4-1. Une autre constante du mouvement :

Considérons la Relation Fondamentale de la Dynamique : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{k}{r^2}\vec{e_r}$

Multiplions vectoriellement par le moment cinétique exprimé au point O, centre attracteur : $\vec{\sigma} \wedge \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\sigma} \wedge \dfrac{k}{r^2}\vec{e_r}$

Or : $\vec{\sigma} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$ donc $\vec{\sigma} \wedge \dfrac{d\vec{p}}{dt} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z} \wedge \dfrac{k}{r^2}\vec{e_r} = km\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

Comme : $\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = \dfrac{d\vec{e_r}}{dt}$ il vient $\dfrac{1}{km}\left(\vec{\sigma} \wedge \dfrac{d\vec{p}}{dt}\right) = \dfrac{d\vec{e_r}}{dt}$

Par ailleurs, d'après le Théorème du Moment Cinétique, on a démontré que $\vec{\sigma} = \overrightarrow{cste}$, il vient donc :

$\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\sigma} \wedge \vec{p}\right) = \vec{\sigma} \wedge \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

On tire alors : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km}\right) - \dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{0}$.

Ceci permet de faire apparaître un vecteur constant : $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km} - \vec{e_r}$

La démarche usuelle rencontrée dans les problèmes consiste à fournir l'expression du vecteur excentricité, et à demander au candidat de vérifier son invariance : $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\varepsilon}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km}\right) - \dfrac{d\vec{e_r}}{dt}$

Ayant montré à partir du Théorème du Moment Cinétique que $\vec{\sigma} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z} = \overrightarrow{Cste}$,

on calcule : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km}\right) = \dfrac{1}{km}\vec{\sigma} \wedge \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \dfrac{1}{km}mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z} \wedge \dfrac{k}{r^2}\vec{e_r} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

Comme par ailleurs : $\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$ on déduit que $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\varepsilon}\right) = \vec{0}$

Il est inutile de mémoriser l'expression de ce vecteur, il suffit de savoir qu'il existe. Son utilisation pour déterminer la trajectoire et ses propriétés méritent d'être retenues.

4-2. Etablissement de l'équation de la trajectoire :

Considérons le produit scalaire du vecteur position par le vecteur excentricité : $\overrightarrow{OM} \bullet \vec{\varepsilon} = r\vec{e_r} \bullet \vec{\varepsilon}$.

En notant θ l'angle défini par : $\theta = \left(\overrightarrow{OM}, \vec{\varepsilon}\right)$: $\overrightarrow{OM} \bullet \vec{\varepsilon} = r\varepsilon\cos\theta = r\vec{e_r} \bullet \left(\dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km} - \vec{e_r}\right)$

Or d'après les règles du produit mixte : $r\vec{e_r} \bullet \left(\vec{\sigma} \wedge \vec{p}\right) = \vec{\sigma} \bullet \left(\vec{p} \wedge r\vec{e_r}\right) = -\vec{\sigma}^2$

Il vient donc : $\overrightarrow{OM} \bullet \vec{\varepsilon} = r\varepsilon\cos\theta = \dfrac{-\sigma^2}{km} - r$ d'où finalement : $r(\theta) = \dfrac{-\dfrac{\sigma^2}{km}}{1+\varepsilon\cos\theta}$

On retrouve formellement l'équation polaire déjà étudiée : $r(\theta) = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$

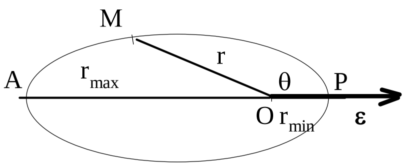
et donc par identification : $p = \dfrac{-\sigma^2}{km} = \dfrac{-mC^2}{k}$ en notant C la Constante des Aires : $C = \dfrac{\sigma}{m}$

Le module du vecteur excentricité ε s'identifie à l'excentricité e de la trajectoire.

4-3. Propriétés du vecteur excentricité :

D'après sa définition :

- ♦ $\vec{\varepsilon} = \dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km} - \vec{e_r}$ est un vecteur invariant
- ♦ $\vec{\varepsilon}$ est compris dans le plan de la trajectoire
- ♦le module ε du vecteur $\vec{\varepsilon}$ correspond à l'excentricité de la trajectoire
- ♦la valeur minimale de r correspond à θ = 0 $r\left(\theta = 0\right) = \dfrac{p}{1+e}$, la valeur maximale de r correspond à θ = π, $r\left(\theta = \pi\right) = \dfrac{p}{1-e}$; la direction de $\vec{\varepsilon}$ est donc celle du grand axe de la conique, c'est à dire la droite portant les foyers. Le sens du vecteur excentricité est celui du vecteur reliant le centre d'interaction avec le périastre (périgée, périhélie).



♦ Ces propriétés et l'existence du vecteur excentricité sont spécifiques des interactions coulombiennes, en $\dfrac{k}{r^2}\vec{e_r}$.

4-4. Expression de l'énergie :

En se rappelant que l'énergie mécanique est proportionnelle à e²-1, calculons le carré du module du vecteur excentricité : $\vec{\varepsilon}^2 = \left(\dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km} - \vec{e_r}\right)^2 = \dfrac{\sigma^2 m^2 v^2}{k^2 m^2} - 2\vec{e_r} \bullet \dfrac{\vec{\sigma} \wedge \vec{p}}{km} + 1$

D'après les règles du produit mixte : $r\vec{e_r} \bullet \left(\vec{\sigma} \wedge \vec{p}\right) = \vec{\sigma} \bullet \left(\vec{p} \wedge r\vec{e_r}\right) = -\vec{\sigma}^2$

Donc : $\vec{\varepsilon}^2 = \dfrac{\sigma^2 m^2 v^2}{k^2 m^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\sigma^2}{km} + 1$

L'énergie mécanique comporte un terme d'énergie cinétique $\dfrac{1}{2}mv^2$ et d'énergie potentielle $\dfrac{k}{r}$ que l'on retrouve dans l'expression précédent en factorisant par $\dfrac{2\sigma^2}{k^2 m}$.

Finalement on obtient : $E = Ec + Ep = \dfrac{k^2 m}{2\sigma^2}\left(\vec{\varepsilon}^2 - 1\right)$